326 ASTÉRISQUE

2009

SÉMINAIRE BOURBAKI
VOLUME 2007/2008
EXPOSÉS 982-996

(992) *Grands graphes planaires aléatoires et carte brownienne*

Vincent BEFFARA

SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE
Publié avec le concours du CENTRE NATIONAL DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

Séminaire BOURBAKI Juin 2008
60e année, 2007–2008, n° 992, p. 299 à 320

GRANDS GRAPHES PLANAIRES ALÉATOIRES ET CARTE BROWNIENNE [d'après Jean-François Le Gall]

par **Vincent BEFFARA**

INTRODUCTION

Un thème récurrent en théorie des probabilités, et en mécanique statistique plus particulièrement, est l'étude de propriétés asymptotiques d'objets aléatoires finis quand leur taille tend vers l'infini — ce qu'en physique on nomme *limite thermodynamique*. Ce que l'on entend par là consiste le plus souvent à définir une variable aléatoire à valeurs réelles représentant une caractéristique d'intérêt de l'objet, et à déterminer si la suite de variables aléatoires ainsi obtenue converge en un certain sens, éventuellement après renormalisation. Deux comportements sont possibles en cas de convergence :

- Il se peut que la limite soit déterministe. Le cas le plus typique est celui de la *loi des grands nombres* : si (X_n) est une suite de variables aléatoires réelles indépendantes, de même loi et intégrables, alors $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$ converge presque sûrement vers l'espérance de X_1. C'est ce qui mène par exemple à la notion de *grandeur intensive* en thermodynamique.
- Il se peut également que la limite reste aléatoire, soit parce qu'elle continue à dépendre fortement de chacune des composantes du système (comme par exemple dans le cas où on considère le signe d'un produit de variables aléatoires), soit parce que la renormalisation a été choisie correctement ; le paradigme est alors celui du *théorème central limite* : si (X_n) est une suite de variables aléatoires réelles indépendantes, de même loi, d'espérance nulle et de variance σ^2 finie, alors $\frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{i=1}^{n} X_i$ converge en loi vers une variable gaussienne centrée et de variance σ^2.

Plus récemment, l'attention des probabilistes s'est portée sur l'objet aléatoire lui-même, vu comme une variable aléatoire à valeurs dans un espace mesuré dont les points sont eux-mêmes des espaces métriques — on peut alors parler de problèmes de *limites d'échelle*. Un cas particulièrement représentatif est celui, considéré par Aldous [**1**], des *arbres aléatoires* (obtenus par exemple comme arbres généalogiques de processus de branchement de type Galton-Watson) et de leur convergence en loi vers des *arbres aléatoires continus*, que l'on peut voir comme un théorème central limite dans l'espace des arbres réels.

Cet exposé est consacré à la présentation de résultats concernant certaines classes de *cartes planaires aléatoires* (*i.e.*, de graphes planaires aléatoires plongés dans la sphère) et de leur limite, la *carte brownienne*. En plus de leur connexion directe avec les arbres aléatoires *via* la bijection de Bouttier, Di Francesco et Guitter, sur laquelle nous revenons plus bas, les cartes planaires apparaissent de manière naturelle dans plusieurs domaines de la physique et des probabilités. Signalons-en ici deux, en renvoyant le lecteur vers le premier chapitre de la thèse de Bouttier [**5**] pour une présentation plus détaillée.

Un premier lien est leur apparition dans l'étude des *intégrales matricielles*. Soit $t > 0$, et soit M_N une matrice hermitienne aléatoire de taille N, distribuée selon la mesure gaussienne $\mu_{N,t}$ (de densité proportionnelle à $\exp(-\frac{N}{2t}\mathrm{Tr}M^2)$ par rapport à la mesure de Lebesgue sur l'espace vectoriel $H(n)$ des matrices hermitiennes). Soit $V(x) = \sum_{n=1}^{d} \frac{v_n}{n} x^n$ un polynôme ; on appelle *modèle à une matrice* la mesure de probabilité sur $H(n)$ dont la densité par rapport à la mesure gaussienne est $Z_{N,V}(t)^{-1}\exp(N\mathrm{Tr}(V(M)))$ — le facteur de normalisation $Z_{N,V}(t)$ porte le nom de *fonction de partition* du modèle, et l'écriture suivante justifie le terme « intégrale matricielle » :

$$Z_{N,V}(t) = E\left[e^{N\mathrm{Tr}V(M_N)}\right] = \int_{H(n)} e^{N\mathrm{Tr}V(M)}\mathrm{d}\mu_{N,t}(M).$$

Une conséquence du théorème de Wick est le développement formel suivant de l'énergie libre du modèle :

$$F_{N,V}(t) := \log Z_{N,V}(t) = \sum_{g=0}^{\infty} N^{2-2g} F_{N,V}^{(g)}(t),$$

où $F_{N,V}^{(g)}(t)$ est la série génératrice des cartes de genre g, chacune étant affectée d'un poids v_n pour chaque sommet de degré n, d'un poids t par arête et d'un facteur de symétrie. En particulier, le terme dominant quand N tend vers $+\infty$ est donné par la série génératrice des cartes planaires, d'où le nom de *limite planaire* donné à ce régime. Le cas $V(x) = \frac{1}{2p}x^{2p}$ est particulièrement intéressant, puisqu'on peut alors, par dualité, voir la série génératrice qui apparaît comme une somme sur toutes les cartes planaires dont les faces ont $2p$ côtés, lesquelles constituent l'objet principal de cet exposé. Passer d'un tel développement formel à un développement asymptotique de l'énergie libre est loin d'être facile ; on pourra par exemple se référer à la thèse de Maurel-Segala [**25**].

Un second lien entre cartes planaires aléatoires et mécanique statistique est l'un des aspects de la *gravité quantique*, qui, dans le cadre qui nous intéresse, consiste à définir un modèle microscopique (tel que le modèle d'Ising, la percolation, ou simplement la marche aléatoire) sur un graphe lui-même aléatoire, ce qui dans le cas bidimensionnel revient à le définir sur une carte planaire. La mesure uniforme sur les cartes de taille fixée, qui est celle que nous considérerons par la suite, n'est pas la mieux adaptée ici : en effet, si on considère plutôt une distribution de type Bolzman, pour laquelle le poids d'une carte particulière s'écrit comme un produit sur ses sommets de termes locaux, des parties disjointes du graphe deviennent en un sens indépendantes, ce qui simplifie l'étude du système.

Le principal problème est alors de relier le comportement d'un même modèle en géométrie fixée et en géométrie aléatoire, ce qui reste mal compris dans le cas général. Pour des modèles pris à leur point critique, Knizhnik, Polyakov et Zamolodchikov [**15**] obtiennent un tel lien sous la forme d'une relation entre exposants critiques. Des travaux récents (et non encore publiés) de Duplantier et Sheffield [**11, 12**] construisent une structure conforme aléatoire sur la sphère comme exponentielle d'un champ libre gaussien [**30**], et l'objet ainsi obtenu permet (en oubliant les problèmes de passage à la limite continue) de justifier ce formalisme ; les liens entre cet objet et la carte brownienne restent largement à explorer.

Les premiers liens combinatoires entre cartes planaires et arbres décorés apparaissent dans un article de Cori et Vauquelin [**10**], et constituent le thème de la thèse de Schaeffer [**29**]. Des théorèmes limites similaires à ceux que nous présentons ici, mais pour la plupart exprimés en termes d'arbres et de mobiles, apparaissent dans des travaux de Chassaing et Schaeffer [**9**], Marckert et Miermont [**23**] et Marckert et Mokkadem [**24**]. Ce dernier article introduit le terme de carte brownienne, avec un sens légèrement différent de celui que nous utiliserons par la suite.

Il est à noter que les hypothèses faites sur les cartes considérées (taille fixée des faces, ou simplement bipartition du graphe), si elles sont utiles dans les constructions combinatoires, ne semblent pas fondamentales : la conjecture naturelle est que la carte brownienne constitue la limite d'échelle de toute suite de mesures « naturelles » sur des cartes dont la taille tend vers l'infini. Les travaux récents de Miermont et Weill [**27**] fournissent le principe d'invariance nécessaire sur les arbres, la seule différence à ce niveau avec le cas du degré fixé (en dehors de la complication des preuves) étant que les constantes numériques sont bien sûr différentes.

Signalons enfin l'existence d'une autre approche du problème : on peut considérer la limite en loi d'une carte aléatoire dont la taille tend vers l'infini sans renormaliser la distance de graphe. L'objet limite est alors un graphe planaire localement fini aléatoire, et l'on peut étudier ses propriétés à grande échelle. On s'attend naturellement à ce qu'elles correspondent à des propriétés locales de la carte brownienne. Cette approche a été suivie par Angel et Schramm [**2, 3**] dans le cas de triangulations aléatoires, donnant lieu à la construction de la *triangulation infinie uniforme* du plan.

L'exposé suit essentiellement l'ordre et les notations utilisés dans les articles [**19**], [**21**] et [**20**] ; la principale différence est que nous notons ici d_n la distance renormalisée. Les contraintes de format nous empêchant d'y inclure des preuves détaillées des résultats énoncés, nous renvoyons le lecteur à ces articles pour plus de détails et choisissons de nous concentrer sur une présentation de la stratégie générale de la preuve et des arguments combinatoires utilisés, en donnant quelques indications sur la démonstration des points essentiels.

1. CARTES PLANAIRES, MOBILES ET ARBRES ALÉATOIRES

1.1. Cartes planaires aléatoires

Par *carte planaire*, on désigne un plongement d'un graphe planaire fini dans la sphère $\mathbb{S}^2$, défini à l'action près d'un homéomorphisme direct de la sphère dans elle-même. On autorise *a priori* les arêtes multiples entre deux sommets ainsi que les boucles (arêtes joignant un sommet à lui-même) — notons toutefois que les cartes que nous serons amenés à considérer ne posséderont jamais de telles boucles. Le complémentaire d'une carte planaire est une famille finie de *faces* homéomorphes au disque. Le bord d'une face peut être vu comme une suite finie d'arêtes orientées, que l'on appellera les *côtés* de cette face. Une carte est dite *enracinée* si elle est munie d'une arête orientée marquée (dite *arête-racine*) ; on identifiera deux cartes enracinées s'il existe un homéomorphisme direct de la sphère dans elle-même envoyant l'une sur l'autre, et envoyant l'arête-racine de la première sur celle de la seconde.

Dans tout cet exposé, on fixera un entier p strictement supérieur à 1. Pour tout $n > 0$, soit $\mathscr{M}_n^p$ l'ensemble les cartes planaires enracinées à n faces, dont toutes les faces ont $2p$ côtés. On appellera une telle carte une $2p$-*angulation* de la sphère (une *quadrangulation* dans le cas $p = 2$). L'ensemble $\mathscr{M}_n^p$ est fini, ce qui permet de définir l'objet central de cet exposé :

DÉFINITION 1.1. — *On appelle* $2p$-angulation aléatoire à n faces *une variable aléatoire M_n distribuée selon la loi uniforme sur $\mathscr{M}_n^p$.*