326 ASTÉRISQUE

2009

SÉMINAIRE BOURBAKI
VOLUME 2007/2008
EXPOSÉS 982-996

(993) *Géométrie quasiconforme, analyse au bord des espaces métriques hyperboliques et rigidités*

Peter HAÏSSINSKY

SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE
Publié avec le concours du CENTRE NATIONAL DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

Séminaire BOURBAKI Juin 2008
60e année, 2007–2008, n° 993, p. 321 à 361

GÉOMÉTRIE QUASICONFORME, ANALYSE AU BORD DES ESPACES MÉTRIQUES HYPERBOLIQUES ET RIGIDITÉS [d'après Mostow, Pansu, Bourdon, Pajot, Bonk, Kleiner...]

par **Peter HAÏSSINSKY**

Dans son *Mémoire sur les groupes kleinéens*, H. Poincaré montre qu'une homographie de la sphère de Riemann se prolonge en une transformation conforme de l'espace et définit une isométrie de l'espace hyperbolique. Il établit ainsi un lien entre la géométrie conforme et la géométrie hyperbolique en soulignant que cette interprétation lui est indispensable pour construire des groupes kleinéens.

Un des buts de cet exposé est de montrer comment cette relation très profonde se manifeste dans le contexte plus général des groupes hyperboliques au sens de M. Gromov [**34**]. On appliquera ce point de vue pour mettre en évidence des phénomènes de rigidité en courbure strictement négative et en donner des preuves synthétiques.

1. INTRODUCTION

Soit (X,d) un espace métrique. On dit que (X,d) est *propre* si les boules fermées (de rayon fini) sont compactes. Une courbe *géodésique* dans X est une application $\gamma : I \to X$ définie sur un intervalle I telle que, pour tous $s,t\in I$, $d(\gamma(t),\gamma(s)) = |t-s|$. Si deux points quelconques de X sont joints par un segment géodésique, alors X est un *espace géodésique.*

DÉFINITION 1.1 (Action géométrique). — *Un groupe G* opère géométriquement *sur un espace métrique propre X si*

(1) *chaque élément opère par isométrie ;*

(2) *l'action est proprement discontinue, c'est-à-dire que, pour tous compacts K et L de X, le nombre d'éléments $g\in G$ du groupe tels que $g(K)\cap L\neq\varnothing$ est fini ;*

(3) *l'action est cocompacte.*

(*) L'auteur est partiellement financé par le projet ANR « Cannon » (ANR-06-BLAN-0366).

Par exemple, si G est de type fini et S est une famille finie et symétrique de générateurs de G, on peut considérer le graphe de Cayley $\mathscr{G}$ associé à S : les sommets sont les éléments du groupe, et une paire $(g, g') \in G \times G$ définit une arête si $g^{-1}g' \in S$. En munissant $\mathscr{G}$ de la métrique de longueur qui rend chaque arête isométrique au segment $[0, 1]$, on obtient la *métrique des mots associée à* S. Elle fait de $\mathscr{G}$ un espace géodésique et propre, et l'action de G sur lui-même par translations à gauche induit une action géometrique sur $\mathscr{G}$.

Le lemme de Švarc-Milnor montre que la relation d'équivalence naturelle des groupes qui opèrent géométriquement est donnée par la notion de quasi-isométrie, introduite sous cette forme par G. Margulis [**52**].

DÉFINITION 1.2 (Quasi-isométrie, quasigéodésique). — *Soient* X, Y *des espaces métriques, et* $\lambda \geq 1$, $c \geq 0$ *deux constantes. Une application* $f : X \to Y$ *est un* plongement (λ, c)-quasi-isométrique *si, pour tous* $x, x' \in X$*, on a*

$$\frac{1}{\lambda} d_X(x, x') - c \leq d_Y(f(x), f(x')) \leq \lambda d_X(x, x') + c. \tag{1}$$

On dit que f *est une* (λ, c)-quasi-isométrie *s'il existe* $g : Y \to X$ *qui vérifie aussi* (1) *et telle que, pour tout* $x \in X$, $d_X(g(f(x)), x) \leq c$.

Une quasigéodésique est l'image d'un intervalle de $\mathbb{R}$ *par un plongement quasi-isométrique.*

LEMME 1.3 (Švarc-Milnor). — *Soient* X *un espace géodésique et propre, et* G *un groupe qui opère géométriquement sur* X*. Alors* G *est de type fini et* X *est quasi-isométrique à n'importe quel graphe de Cayley localement fini de* G.

On dira par extension qu'un espace est quasi-isométrique à un groupe s'il est quasi-isométrique à l'un de ses graphes de Cayley localement fini.

Un *triangle* de X est la donnée de trois points et de trois segments géodésiques qui les relient.

DÉFINITION 1.4 (Espace et groupe hyperboliques). — *Un espace géodésique propre* (X, d) *est* hyperbolique *s'il existe une constante* δ *telle que n'importe quel côté d'un triangle est contenu dans le* δ*-voisinage des deux autres. Un groupe est* hyperbolique *s'il opère géométriquement sur un espace hyperbolique, propre et géodésique.*

L'hyperbolicité d'un espace s'exprime notamment par le *lemme de poursuite* de M. Morse qui affirme que toute quasigéodésique d'un espace hyperbolique est à distance finie d'une géodésique. Cela implique que la propriété d'hyperbolicité est invariante par quasi-isométries dans la catégorie des espaces métriques géodésiques.

Une classe importante d'espaces hyperboliques est celle des espaces CAT(-1) : leurs triangles sont plus fins que ceux du plan hyperbolique de Poincaré $\mathbf{H}^2_{\mathbb{R}}$. Elle comprend notamment les variétés de Hadamard de courbure sectionnelle majorée par -1.

Un *rayon* est une géodésique définie sur $\mathbb{R}_+$. Deux rayons d'un espace hyperbolique X sont équivalents s'ils sont à distance de Hausdorff finie. Suivant P. Eberlein et B. O'Neill [**30**], on définit le *bord visuel* (compact) ∂X d'un espace hyperbolique comme l'ensemble des classes de rayons hyperboliques. Il est naturellement muni d'une structure grossièrement conforme qui est préservée par les isométries de X. Les propriétés du bord d'un espace hyperbolique sont établies en utilisant la dynamique à l'infini de ses isométries. Dans le cas des espaces symétriques non compacts de rang 1 et des immeubles fuchsiens, la géométrie de leur bord s'avère être très particulière. Elle est en partie responsable de la rigidité de ces espaces, et plus précisément à l'origine des solutions aux problèmes suivants.

(1) Détermination des variétés compactes localement symétriques de rang 1 par leur groupe fondamental (G.D. Mostow).
(2) Rigidité des espaces symétriques de rang 1 quaternioniens et du plan de Cayley (P. Pansu) ; de même pour les immeubles fuchsiens (M. Bourdon et H. Pajot, et X. Xie).
(3) Caractérisation des réseaux cocompacts de $\mathbb{P}\mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$ *via* leurs bords (J. Cannon *et al.* et M. Bonk et B. Kleiner).

Ces notes contiennent tous les ingrédients pour établir la rigidité des réseaux cocompacts des espaces symétriques hyperboliques et des immeubles fuchsiens :

Théorème 1.5. — *Un groupe quasi-isométrique à un espace symétrique hyperbolique de dimension topologique au moins* 3 *ou à un immeuble fuchsien agit géométriquement sur l'espace symétrique ou l'immeuble fuchsien en question.*

Avertissement.— La thématique que nous abordons ici est en pleine expansion, et des choix sont obligatoirement faits. Ils le sont en fonction du goût de l'auteur, en espérant toutefois qu'ils reflètent bien l'état d'esprit du sujet. En particulier, les énoncés ne seront pas toujours les plus généraux. Signalons aussi que les arguments présentés ici sont empruntés à beaucoup d'auteurs. Étant simplifiés à l'extrême et souvent plus récents que les arguments originaux, ils peuvent sembler ne pas rendre hommage au travail présenté ici tels qu'ils le devraient.

Nous renvoyons à [**1, 28, 32, 34**] au sujet des groupes hyperboliques. On peut consulter [**45**] pour les propriétés de leur bord, et [**3, 15, 47**] pour les liens entre géométrie hyperbolique, géométrie quasiconforme et dynamique conforme.

Conventions.— Tous les espaces hyperboliques seront supposés géodésiques et propres non bornés, avec un bord connexe non trivial. Si X est hyperbolique,

$\mathrm{Isom}(X)$ désignera le groupe d'isométries de X muni de la topologie compacte-ouverte, ce qui le rend localement compact. Un réseau cocompact est dans ce contexte un sous-groupe discret cocompact. Si $p \geq 2$ et X est hyperbolique, on désigne par $\partial^p X$ l'ensemble des p-uplets non ordonnés du bord de X deux à deux distincts.

Si a, b sont des fonctions à valeurs positives, on écrit $a \lesssim b$ ou $b \gtrsim a$ s'il existe une constante universelle $u > 0$ telle que $a \leq ub$. On écrit $a \asymp b$ si $a \lesssim b$ et $b \lesssim a$.

REMERCIEMENTS.— Je tiens tout particulièrement à remercier M. Bourdon, H. Pajot et P. Pansu pour m'avoir expliqué avec beaucoup de patience et de gentillesse leurs travaux. Je les remercie aussi, ainsi que C. Pittet, pour leur lecture attentive de versions préliminaires de ce texte.

2. NOTIONS DE GÉOMÉTRIE QUASICONFORME

On présente quelques notions de géométrie quasiconforme qui seront motivées par la théorie géométrique des fonctions de l'espace euclidien.

2.1. Du conforme au quasiconforme

Les homéomorphismes quasiconformes sont obtenus en assouplissant certaines propriétés des transformations conformes. On obtient ainsi plusieurs variantes. On s'appuie essentiellement sur [**42, 71**].

2.1.1. *Quasisymétrie.* — Une transformation conforme du plan complexe (qui préserve l'orientation) est une transformation affine $z \mapsto az + b$, avec $a \neq 0$. Sa propriété principale est de préserver les rapports de distances. P. Tukia et J. Vaïsälä assouplissent cette condition comme suit [**68**].

DÉFINITION 2.1 (Homéomorphisme quasisymétrique). — *Soit $f : (X, d) \to (X', d')$ un homéomorphisme entre espaces métriques. Étant donné un homéomorphisme $\eta : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$, on dit que f est* η-quasisymétrique *si, pour tous x, y, z tels que $d(x, y) \leq td(x, z)$, on a $d'(fx, fy) \leq \eta(t)d'(fx, fz)$. On dira tout simplement que f est quasisymétrique s'il existe η telle que la relation ci-dessus soit vraie. La fonction η est une* fonction de distorsion *de f.*

Si f est un homéomorphisme η-quasisymétrique alors f^{-1} est η'-quasisymétrique avec $\eta'(t) = 1/\eta^{-1}(1/t)$. Si f est L-bilipschitz alors f est quasisymétrique avec $\eta(t) = L^2 t$.

Cette condition est forte car elle implique de la distorsion bornée, comme le théorème de Koebe pour les applications univalentes [**42**, Prop. 10.8] :