326

ASTÉRISQUE

2009

SÉMINAIRE BOURBAKI
VOLUME 2007/2008
EXPOSÉS 982-996

(994) *La dualité étrange*

Christian PAULY

SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE
Publié avec le concours du CENTRE NATIONAL DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

Séminaire BOURBAKI Juin 2008
60e année, 2007–2008, no 994, p. 363 à 377

LA DUALITÉ ÉTRANGE
[d'après P. Belkale, A. Marian et D. Oprea]

par **Christian PAULY**

Introduction

Le but de ces notes est de donner un bref aperçu d'un résultat important sur les fibrés vectoriels sur une courbe algébrique : la dualité étrange ou la dualité rang-niveau.

En 1994, disposant de la formule de Verlinde qui donne la dimension des espaces de fonctions thêta généralisées d'ordre k sur les espaces de modules de fibrés de rang r (voir sections 1.2 et 1.3), on a conjecturé que les deux espaces associés aux couples (r, k) et (k, r) sont naturellement duaux, la dualité entre ces espaces vectoriels étant induite par le produit tensoriel des fibrés vectoriels. Cette conjecture a été démontrée seulement en 2006, d'abord par P. Belkale pour une courbe générale et ensuite par A. Marian et D. Oprea pour toute courbe.

Une des idées principales, commune aux deux démonstrations, est de construire une base explicite de fonctions thêta généralisées d'ordre r indexée par des fibrés vectoriels particuliers de rang r. P. Belkale obtient ces fibrés particuliers comme sous-fibrés d'un fibré de rang $r + k$ sur la droite projective, et A. Marian et D. Oprea considèrent les sous-fibrés de degré maximal d'un fibré fixé de rang $r + k$ sur une courbe quelconque. La deuxième idée clé est alors de montrer que le nombre de ces fibrés particuliers est égal à la dimension des espaces de fonctions thêta généralisées donnée par la formule de Verlinde — notons que les deux problèmes énumératifs et leur nombre de solutions sont différents. C'est à ce niveau-là qu'interviennent la combinatoire de la formule de Verlinde et le lien entre l'anneau de fusion et la cohomologie quantique de la grassmannienne $\mathrm{Gr}(r, r + k)$, déjà observé par E. Witten dans [**33**]. Tandis que P. Belkale montre que le nombre de ses fibrés particuliers vérifie les mêmes relations de récurrence que les nombres de Verlinde, A. Marian et D. Oprea utilisent la formule de Vafa et Intiligator donnant les invariants de Gromov-Witten associés à la grassmannienne $\mathrm{Gr}(r, r + k)$.

Dans la dernière section, je décris quelques généralisations de la dualité étrange, notamment aux fibrés vectoriels avec structure parabolique et aux G-fibrés principaux. Dans ce dernier cas, de nombreuses questions restent ouvertes.

Dans ces notes, je ne mentionne que les constructions de dualité étrange sur les courbes. Des constructions analogues existent sur les surfaces projectives, en particulier sur le plan projectif et sur les surfaces abéliennes — voir [**19**].

Il existe des « surveys » récents sur la dualité étrange : les notes de cours de M. Popa [**27**], section 5, et l'article de A. Marian et D. Oprea [**19**].

J'aimerais remercier P. Belkale et R. Oudompheng pour leurs commentaires sur ces notes.

1. ESPACES DE MODULES DE FIBRÉS VECTORIELS SUR UNE COURBE

Dans cette section, on rappelle brièvement les principaux résultats concernant les espaces de modules de fibrés vectoriels sur les courbes et les espaces de fonctions thêta généralisées. Pour plus de détails on renvoie par exemple au livre de J. Le Potier [**16**] et aux notes de M. Popa [**27**] et de C. Sorger [**30**].

1.1. Propriétés des espaces de modules

Soit X une courbe projective lisse complexe de genre $g \geq 1$. Étant donné un fibré vectoriel E sur la courbe X, on peut lui associer deux entiers : son rang $r = \mathrm{rg}(E)$ et son degré $d = \deg(E) := \deg(\Lambda^r E)$. Ce sont des invariants topologiques. Si l'on se donne la courbe X ainsi que r et d, il existe une variété projective, notée $\mathcal{U}_X(r,d)$, qui paramètre les classes de S-équivalence de fibrés vectoriels semi-stables de rang r et de degré d sur la courbe X. Rappelons que $\mathcal{U}_X(r,d)$ est une variété irréductible, de dimension $r^2(g-1)+1$ et que les points fermés de $\mathcal{U}_X(r,d)$ correspondent aux sommes directes de fibrés vectoriels stables.

Si $r=1$, l'espace de modules $\mathcal{U}_X(1,d)$ coïncide avec la variété de Picard $\mathrm{Pic}^d(X)$ paramétrant les fibrés en droites de degré d. Nous notons $\mathrm{Jac}(X) := \mathrm{Pic}^0(X)$ la jacobienne de la courbe X.

Il existe un morphisme de variétés induit par le déterminant

$$\det : \mathcal{U}_X(r,d) \longrightarrow \mathrm{Pic}^d(X), \qquad E \mapsto \det(E).$$

Nous notons $\mathcal{SU}_X(r,L)$ la fibre $\det^{-1}(L)$ au-dessus du fibré en droites $L \in \mathrm{Pic}^d(X)$ et $\mathcal{SU}_X(r) := \mathcal{SU}_X(r,\mathcal{O})$. Afin de simplifier la notation, nous introduisons aussi $\mathcal{U}^*_X(r) := \mathcal{U}_X(r, r(g-1))$.

À plusieurs reprises dans le texte, on utilisera le résultat élémentaire suivant : le morphisme induit par le produit tensoriel

$$t : \mathcal{SU}_X(r) \times \mathrm{Pic}^{g-1}(X) \longrightarrow \mathcal{U}_X^*(r), \qquad (E, L) \mapsto E \otimes L \tag{1}$$

est un revêtement étale galoisien de groupe de Galois égal au groupe $\mathrm{Jac}(X)[r] \cong (\mathbb{Z}/r\mathbb{Z})^{2g}$ des points de r-torsion de la jacobienne.

1.2. Fonctions thêta généralisées

Avant de définir les fonctions thêta généralisées, on rappelle quelques notions sur les fonctions thêta abéliennes. L'ensemble

$$\Theta := \{M \in \mathrm{Pic}^{g-1}(X) \mid h^0(X, M) > 0\} \subset \mathrm{Pic}^{g-1}(X)$$

détermine un diviseur de Cartier effectif — le *diviseur thêta* — dans $\mathrm{Pic}^{g-1}(X)$, qui définit, après translation $T_L : \mathrm{Jac}(X) \to \mathrm{Pic}^{g-1}(X)$ par un fibré en droites L de degré $g-1$, un diviseur $\Theta_L := T_L^*\Theta$ dans la jacobienne donnant une polarisation principale, c'est-à-dire $h^0(\mathrm{Jac}(X), \mathcal{O}(\Theta_L)) = 1$. Les sections globales du fibré $\mathcal{O}(k\Theta_L)$ sont appelées les fonctions thêta d'ordre k.

La construction précédente se généralise sans trop d'obstacles aux espaces de modules $\mathcal{U}_X(r, d)$: on montre que l'ensemble

$$\Theta := \{[E] \in \mathcal{U}_X^*(r) \mid h^0(X, E) > 0\} \subset \mathcal{U}_X^*(r), \tag{2}$$

où $[E]$ désigne la classe de S-équivalence d'un fibré semi-stable E, détermine un diviseur de Cartier effectif — le *diviseur thêta généralisé* — dans $\mathcal{U}_X^*(r)$. Comme en rang 1, on a aussi la relation **[5]**

$$h^0(\mathcal{U}_X^*(r), \mathcal{O}(\Theta)) = 1.$$

En prenant l'image inverse par le morphisme induit par produit tensoriel $T_L : \mathcal{U}_X(r, 0) \to \mathcal{U}_X^*(r)$ avec un fibré en droites L de degré $g-1$ et en restreignant à la sous-variété $\mathcal{SU}_X(r) \subset \mathcal{U}_X(r, 0)$, on obtient un diviseur de Cartier Θ_L dans $\mathcal{SU}_X(r)$ dont le support est

$$\Theta_L = \{[E] \in \mathcal{SU}_X(r) \mid h^0(X, E \otimes L) > 0\}.$$

On sait **[13]** que le fibré en droites associé $\mathcal{L} = \mathcal{O}(\Theta_L)$ est ample, ne dépend pas du choix de L et engendre le groupe de Picard

$$\mathrm{Pic}(\mathcal{SU}_X(r)) = \mathbb{Z} \cdot \mathcal{L}.$$

Par analogie avec le cas $r = 1$, on appelle les sections globales de $\mathcal{L}^k$ sur $\mathcal{SU}_X(r)$ les *fonctions thêta généralisées* d'ordre k.

1.3. La formule de Verlinde

La formule de Verlinde donne la dimension de l'espace des fonctions thêta généralisées d'ordre k sur $\mathcal{SU}_X(r)$. Remarquons que la formule de Verlinde donne en fait la dimension des espaces de blocs conformes, qu'on peut identifier aux espaces de fonctions thêta généralisées. On renvoie aux notes de A. Beauville [**3**] et de C. Sorger [**30**] pour une discussion détaillée et les démonstrations. Dans notre cas, on utilisera la formule de Verlinde sous la forme suivante (due à D. Zagier) : on pose $N = r + k$.

$$N_k(\mathrm{SL}(r)) := h^0(\mathcal{SU}_X(r), \mathcal{L}^k) = \left(\frac{r}{N}\right)^g \sum_{\substack{S \cup T = \{0,\dots,N-1\} \\ |S|=k, |T|=r}} \prod_{\substack{s \in S \\ t \in T}} \left| 2 \sin \pi \frac{s-t}{N} \right|^{g-1}. \tag{3}$$

On observe que cette formule présente une symétrie en les variables r et k. Plus précisément on a la relation

$$\frac{N_k(\mathrm{SL}(r))}{r^g} = \frac{N_r(\mathrm{SL}(k))}{k^g}. \tag{4}$$

On déduit la dimension $N_k(\mathrm{GL}(r))$ de $H^0(\mathcal{U}_X^*(r), \mathcal{O}(k\Theta))$ à partir de la formule de Verlinde (3) en utilisant le revêtement étale galoisien (1) : on calcule l'image inverse

$$t^* \mathcal{O}(k\Theta) = \mathcal{L}^k \boxtimes \mathcal{O}(kr\Theta),$$

ce qui permet de déduire

$$N_k(\mathrm{GL}(r)) = \frac{k^g}{r^g} N_k(\mathrm{SL}(r)) = N_r(\mathrm{SL}(k)). \tag{5}$$

2. LA DUALITÉ ÉTRANGE

2.1. La construction de Beauville-Donagi-Tu

Dans cette section, on va énoncer le théorème principal de l'exposé. Ce théorème avait été conjecturé en 1994 par A. Beauville [**3**], ainsi que par R. Donagi et L. Tu [**12**]. Cette conjecture était fondée sur des travaux antérieurs en théorie conforme des champs — voir par exemple [**21**]. La construction de la « dualité étrange » est la suivante : on considère deux entiers r et k et le morphisme entre espaces de modules de fibrés vectoriels semi-stables de rang r et k induit par le produit tensoriel

$$t : \mathcal{SU}_X(k) \times \mathcal{U}_X^*(r) \longrightarrow \mathcal{U}_X^*(kr), \qquad (E, F) \mapsto E \otimes F.$$

Notons que cette flèche est bien un morphisme, car la semi-stabilité des fibrés est préservée par produit tensoriel. On calcule comme précédemment l'image inverse

$$t^* \mathcal{O}(\Theta) = \mathcal{L}^r \boxtimes \mathcal{O}(k\Theta).$$