326

ASTÉRISQUE

2009

SÉMINAIRE BOURBAKI
VOLUME 2007/2008
EXPOSÉS 982-996

(996) *Échanges d'intervalles et surfaces de translation*

Jean-Christophe YOCCOZ

SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE

Publié avec le concours du CENTRE NATIONAL DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

Séminaire BOURBAKI Juin 2008
60e année, 2007–2008, no 996, p. 387 à 409

ÉCHANGES D'INTERVALLES ET SURFACES DE TRANSLATION

par **Jean-Christophe YOCCOZ**

1. INTRODUCTION

Soit M une surface de Riemann compacte de genre $g \geq 1$ et ω une 1-forme holomorphe sur M, non identiquement nulle. Notons Σ l'ensemble des zéros de ω. Les primitives locales de ω constituent un atlas sur $M - \Sigma$ dont les changements de carte sont localement des translations. Inversement, un tel atlas munit $M - \Sigma$ d'une structure complexe (qui se prolonge à M) et d'une 1-forme holomorphe pour cette structure. On appelle *surface de translation* cette structure géométrique. Elle définit naturellement sur $M - \Sigma$ une forme d'aire et un champ de vecteurs vertical (s'écrivant $\frac{\partial}{\partial y}$ dans les cartes).

Pour analyser la dynamique du flot vertical, on peut considérer l'application de premier retour sur un segment horizontal. L'application ainsi définie est un *échange d'intervalles* : une transformation biunivoque qui est localement une translation à l'exception d'un nombre fini de discontinuités.

Le cas du genre 1 est classique et bien connu : le champ de vecteurs est un champ constant, en général irrationnel : la transformation de premier retour à une ou deux discontinuités. Les échanges d'intervalles ayant une seule discontinuité sont simplement des rotations sur le cercle après identification des extrémités du segment.

Voici presque 30 ans, Rauzy [**51**] et Veech [**52**] ont défini pour les échanges d'intervalles un algorithme qui généralise l'algorithme de fraction continue si important pour étudier les propriétés diophantiennes des nombres irrationnels. La définition et quelques propriétés de cet outil fondamental sont rappelées au § 2. Veech s'en est servi pour démontrer de nombreuses propriétés profondes des échanges d'intervalles : cf. [**53**], [**54**], [**55**]. Une variante très utile de l'algorithme a été mise au point par Zorich [**59**].

SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE 2013

Une des propriétés très surprenantes de presque tout échange d'intervalles (quand la combinatoire n'est pas celle d'une rotation) est le mélange faible : d'abord démontré par Katok-Stepin pour 3 intervalles (ou plus généralement dans le cas de genre 1), elle a ensuite été obtenue par Veech sous une hypothèse un peu moins restrictive sur la combinatoire, avant d'être prouvée en toute généralité par Avila-Forni. Ce résultat est présenté au § 4.

Auparavant, nous rappelons au § 3 quelques propriétés des surfaces de translation, leurs relations avec les échanges d'intervalles, et introduisons les espaces de modules $\mathscr{M}^{(1)}(M, \Sigma, \kappa)$ pour les surfaces de translation d'aire 1. Cet espace de modules est naturellement muni d'une action de $SL(2, \mathbb{R})$; on appelle flot de Teichmüller la restriction de cette action au sous-groupe diagonal. La relation entre flot de Teichmüller et algorithme de Rauzy-Veech est la même qu'entre flot géodésique sur la surface modulaire et algorithme usuel de fraction continue (le cas de genre un) : l'un s'obtient comme suspension de l'extension naturelle de l'autre.

Pour définir les espaces de modules $\mathscr{M}^{(1)}(M, \Sigma, \kappa)$, on a fixé les multiplicités, $\kappa_1 - 1, \ldots, \kappa_s - 1$ des zéros $A_1 \ldots A_s$ de la 1-forme ω. Les espaces de modules ainsi définis ne sont pas toujours connexes, mais ils ont au plus 3 composantes connexes. Kontsevich et Zorich ont complètement classifié ces composantes au moyen de deux notions : hyperellipticité et parité du spin. Leur travail est présenté succinctement au § 6.

Au-dessus du flot de Teichmüller sur chaque composante de $\mathscr{M}^{(1)}(M, \Sigma, \kappa)$ est défini un cocycle, dit de Kontsevich-Zorich, dont les propriétés gouvernent dans une large mesure la dynamique de presque tout échange d'intervalles. Comme le flot de Teichmüller est ergodique sur chaque composante d'après un résultat fondamental de Masur et Veech, on peut en calculer les exposants de Lyapunov. La non-nullité de ceux-ci avait été démontrée par Forni et fait l'objet d'un séminaire Bourbaki antérieur [**37**]. Confirmant une conjecture de Zorich, Avila et Viana ont démontré la simplicité des exposants de Lyapunov pour le cocycle de Kontsevich-Zorich. Leur résultat est présenté au § 5.

Parce que le flot de Teichmüller s'intègre dans une action de $SL(2, \mathbb{R})$, son ergodicité implique qu'il est mélangeant. Avila, Gouezel et moi-même avons montré qu'il est même exponentiellement mélangeant. Cela implique une propriété de trou spectral et est discuté au § 7.

Les échanges d'intervalles, les surfaces de translation et leurs espaces de modules ont fait l'objet de très nombreuses recherches dans la décennie écoulée et les résultats présentés ci-après ne représentent qu'une partie de cette activité. J'ai choisi de présenter des résultats se rattachant plutôt à la théorie des systèmes dynamiques. Parmi les nombreux résultats importants non abordés par cet exposé, citons

– la détermination par Eskin et Okunkov du volume des espaces de modules [**12**] ;

- l'estimation asymptotique du nombre de connexion de selles par Eskin-Masur [**10**] et Eskin-Masur-Zorich [**11**] ;
- les travaux de Hubert, Lanneau, Lelièvre, Möller, Schmidt sur les groupes de Veech, stabilisateurs des points de l'espace des modules pour l'action de $SL(2,\mathbb{R})$ [**19**], [**20, 21**] [**22, 23**], [**24**] [**25**] à [**29**] ;
- la détermination indépendamment par McMullen [**42**] à [**45**] et Calta [**8**] des ensembles fermés transitifs pour l'action de $SL(2,\mathbb{R})$ sur les espaces de modules en genre 2, et en particulier la classification des orbites fermées de cette action (surfaces de Veech) ;
- ...

Le lecteur pourra consulter avec profit le très complet exposé de Zorich [**62**] pour une introduction à ces questions.

2. L'ALGORITHME DE RAUZY-VEECH-ZORICH POUR LES ÉCHANGES D'INTERVALLES

2.1. Échanges d'intervalles

Un échange d'intervalles est une transformation biunivoque d'un intervalle borné dans lui-même qui est localement une translation à l'exception d'un nombre fini de singularités.

Dans l'optique de l'algorithme décrit ci-dessous, il est préférable de nommer les intervalles de continuité. On se donne donc un alphabet fini $\mathcal{A}$, avec $d := \#\mathcal{A} \geq 2$, et deux bijections π_t, π_b de $\mathcal{A}$ sur $\{1, \dots, d\}$ qui indiquent l'ordre dans lequel sont rangés les sous-intervalles dans le domaine et dans l'image de la transformation. On supposera toujours que cette *donnée combinatoire* $\pi = (\pi_t, \pi_b)$ est *irréductible* :

$$\pi_t^{-1}(\{1 \dots k\} \neq \pi_b^{-1}(\{1, \dots k\}), \quad \forall 1 \leq k < d.$$

Sinon, la transformation considérée est une juxtaposition de deux transformations plus simples. Etant donné un *vecteur de longueurs* $\lambda = (\lambda_\alpha)_{\alpha \in \mathcal{A}} \in \mathbb{R}_+^{\mathcal{A}}$, on pose $I = (0, \sum \lambda_\alpha)$ et

$$I_\alpha^\varepsilon = \Bigg(\sum_{\pi_\varepsilon \beta < \pi_\varepsilon \alpha} \lambda_\beta, \sum_{\pi_\varepsilon \beta \leq \pi_\varepsilon \alpha} \lambda_\beta \Bigg)$$

pour $\varepsilon = t, b$ et $\alpha \in \mathcal{A}$.

On définit une matrice antisymétrique $\Omega = \Omega(\pi)$ par

$$\Omega_{\alpha\beta} = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad \pi_t\alpha < \pi_t\beta, \pi_b\alpha > \pi_b\beta, \\ -1 & \text{si} \quad \pi_t\alpha > \pi_t\beta, \pi_b\alpha < \pi_b\beta, \\ 0 & \text{sinon,} \end{cases}$$

puis l'échange d'intervalles $T = T_{\pi,\lambda}$ par

$$T(x) = x + \sum_{\beta} \Omega_{\alpha\beta}\lambda_\beta, \quad x \in I^t_\alpha$$

de sorte que $T(I^t_\alpha) = I^b_\alpha$.

Les singularités de T (resp. de T^{-1}) sont les $d-1$ points de $I - \cup I^t_\alpha$ (resp. de $I - \cup I^b_\alpha$) et sont notées $u^t_1 < \ldots < u^t_{d-1}$ (resp. $u^b_1 < \ldots < u^b_{d-1}$). Une *connexion* est une relation $T^m(u^b_i) = u^t_j (m \geq 0, 1 \leq i, j < d)$ qui correspond à une orbite de T joignant deux singularités. Keane a montré **[32]** qu'un échange d'intervalles sans connexion est minimal, et qu'un échange d'intervalles dont les coordonnées du vecteur de longueurs sont rationnellement indépendantes est sans connexion.

Pour $d = 2$, un échange d'intervalles est sans connexion si et seulement s'il correspond à une rotation irrationnelle.

2.2. Le pas élémentaire de l'algorithme de Rauzy-Veech

Soit $T = T_{\pi,\lambda}$ un échange d'intervalles. Notons α_t, α_b les lettres telles que $\pi_t(\alpha_t) = \pi_b(\alpha_b) = d$.

Supposons T sans connexion. On a donc en particulier $u^t_{d-1} \neq u^b_{d-1}$. On pose $\widehat{I} = (0, \max(u^t_{d-1}, u^b_{d-1}))$ et on note $\widehat{T}$ l'application de premier retour dans $\widehat{I}$.

L'application $\widehat{T}$ est un échange d'intervalles sans connexion $T_{\hat{\pi},\hat{\lambda}}$ (sur le même alphabet $\mathcal{A}$). Si $u^t_{d-1} > u^b_{d-1}$, on a

$$\hat{\pi} = (\hat{\pi}_t, \hat{\pi}_b) =: R_t(\pi)$$

avec $\hat{\pi}_t = \pi_t$ et

$$\hat{\pi}_b\alpha = \begin{cases} \pi_b\alpha & \text{si} \quad \pi_b\alpha \leq \pi_b\alpha_t, \\ \pi_b\alpha + 1 & \text{si} \quad \pi_b\alpha_t < \pi_b\alpha < d, \\ \pi_b\alpha_t + 1 & \text{si} \quad \pi_b\alpha = d, \end{cases}$$

ainsi que

$$\begin{cases} \widehat{\lambda}_\alpha = \lambda_\alpha & \alpha \neq \alpha_t \\ \widehat{\lambda}_{\alpha_t} = \lambda_{\alpha_t} - \lambda_{\alpha_b}. \end{cases}$$

Les formules pour $u^b_{d-1} > u^t_{d-1}$ sont analogues, en échangeant b et t.

2.3. Diagrammes de Rauzy

Une *classe de Rauzy* sur un alphabet $\mathcal{A}$ est un ensemble non vide de données combinatoires irréductibles qui est stable par R_t et R_b et minimal (pour l'inclusion) parmi les ensembles ayant cette propriété. Le *diagramme de Rauzy* associé est le graphe dont les sommets sont les éléments de la classe et les flèches (de type top ou bottom) joignent un sommet π à $R_t\pi$ et $R_b\pi$. Comme R_t et R_b sont biunivoques, chaque sommet est aussi extrémité d'une flèche de chaque type. Le *gagnant* d'une