326

ASTÉRISQUE

2009

SÉMINAIRE BOURBAKI
VOLUME 2007/2008
EXPOSÉS 982-996

(983) *Le problème de Kneser-Tits*

Philippe GILLE

SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE

Publié avec le concours du CENTRE NATIONAL DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

Séminaire BOURBAKI Novembre 2007
60e année, 2007–2008, no 983, p. 39 à 81

LE PROBLÈME DE KNESER-TITS

par **Philippe GILLE**

1. INTRODUCTION

Soient k un corps et k_s une clôture séparable. Soit $\mathbf{G}\,/k$ un k-groupe réductif (connexe). On note $\mathbf{G}(k)$ le groupe abstrait des k-points de $\mathbf{G}$. On note $\mathbf{G}(k)^+$ le sous-groupe (distingué) de $\mathbf{G}(k)$ engendré par les $\mathbf{U}(k)$ pour $\mathbf{U}$ parcourant l'ensemble des k-sous-groupes de $\mathbf{G}$ isomorphes au groupe additif $\mathbf{G}_a$. Le quotient

$$W(k, \mathbf{G}) := \mathbf{G}(k)/\,\mathbf{G}(k)^+$$

est le groupe de Whitehead du groupe $\mathbf{G}\,/k$. Tits a montré que, si $\mathbf{G}\,/k$ est presque k-simple (i.e. ne possède aucun sous-k-groupe distingué connexe) et isotrope, et si $\mathrm{card}(k) \geq 4$, alors tout sous-groupe distingué propre de $\mathbf{G}(k)^+$ est central [**96**], englobant ainsi de nombreux résultats classiques de simplicité [**36**], [**23**], [**17**].

La conjecture originelle de Kneser-Tits (1964) énonce que $W(k, \mathbf{G}) = 1$ pour de tels groupes $\mathbf{G}$ simplement connexes et partant que $\mathbf{G}(k)$ est projectivement simple, c'est-à-dire que le quotient $\mathbf{G}(k)/Z(\mathbf{G}(k))$ de $\mathbf{G}(k)$ par son centre est simple. L'exposé 505 (1977) de J. Tits rend compte de nombreux cas où effectivement $W(k, \mathbf{G}) = 1$ mais aussi des contre-exemples de Platonov pour certains groupes de type ${}^1A_{n^2-1}$ [**71**]. Le problème de Kneser-Tits devient alors de trouver des conditions nécessaires et suffisantes sur un groupe $\mathbf{G}\,/k$ pour que $W(k, \mathbf{G}) = 1$. Ce problème conduit en particulier aux deux questions suivantes selon que l'on privilégie les groupes ou les corps de base.

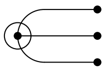
Question 1.1. — *Peut-on caractériser les groupes $\mathbf{G}\,/k$ tels que $W(F, \mathbf{G}) = 1$ pour tout corps F/k ? (On dit alors que le groupe $\mathbf{G}\,/k$ est W-trivial.)*

Question 1.2. — *Peut-on déterminer des classes de corps k tels que $W(k, \mathbf{G}) = 1$ pour tout k-groupe semi-simple presque simple simplement connexe et isotrope $\mathbf{G}/k$?*

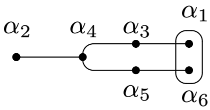
En particulier, est-ce le cas pour un corps global F ?

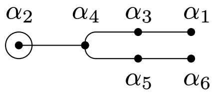
La première question est plus algébrique et la seconde plus arithmétique, du moins pour les corps globaux. Pour la première question, le cas de $\mathbf{SL}_n(D)$, cas des contre-exemples de Platonov, est celui qui est le mieux compris grâce à Suslin, Rost et Merkurjev. Cet exemple (et celui des autres groupes classiques) fait le lien entre la rationalité du corps des fonctions de $\mathbf{G}$ et le problème de Kneser-Tits. Ce lien est en fait de nature générale, ce qui permet de réunir dans un cadre commun la plupart des résultats connus de « W-trivialité ».

La seconde question pour les corps de nombres se décompose cas par cas. Depuis l'exposé de Tits [**98**, §1.2] et jusqu'à très récemment, il restait à traiter trois types de groupes exceptionnels. Il s'agit des groupes trialitaires de rang relatif un, i.e. d'indice de Tits

 ,

et les groupes extérieurs de type E_6 d'indice de Tits

${}^2E^{29}_{6,1}$ 

ou ${}^2E^{35}_{6,1}$ 

.

Pour un corps de nombres F, la trivialité de $W(F, \mathbf{G})$ est due à G. Prasad et M.S. Raghunathan pour les groupes trialitaires [**78**] ; pour le type ${}^2E^{29}_{6,1}$, il s'agit d'un résultat récent de W-trivialité de S. Garibaldi [**26**]. Le dernier cas ${}^2E^{35}_{6,1}$ est établi dans la section 8 comme un avatar d'un théorème de Chernousov-Timoshenko sur la R-équivalence pour ces groupes [**16**], ce qui permet d'énoncer le

Théorème 1.3. — *Soient F un corps global et $\mathbf{G}/F$ un groupe semi-simple simplement connexe presque simple et isotrope. Alors $W(F, \mathbf{G}) = 1$ et $\mathbf{G}(F)$ est un groupe projectivement simple.*

Remerciements. — En premier lieu, je tiens à remercier vivement Vladimir Chernousov et Jean-Louis Colliot-Thélène, leur expertise a été précieuse. Les commentaires d'Yves Benoist, Skip Garibaldi, Bruno Kahn, Arturo Pianzola et Gopal Prasad ont permis des améliorations substantielles d'une version préliminaire de cet exposé, c'est avec grand plaisir que je les remercie. J'ai bénéficié également des suggestions bienvenues de Boris Kunyavskiĭ et de Fabien Morel.

Je remercie Adrian Wadsworth d'avoir relevé que la version plus forte de la proposition 5.1 (figurant dans la version distribuée de cet exposé) était canulée.

2. LE CAS DE $\mathbf{SL}_N(A)$

Soit A une algèbre simple centrale de dimension finie sur son centre k. On sait que $A = M_r(D)$ pour une (unique) algèbre simple centrale à division D et on note $\mathrm{ind}_k(A) = \sqrt{\dim_k(D)}$ l'indice de A. Le groupe $\mathbf{G} = \mathbf{SL}_1(A) = \mathbf{SL}_r(D)$ des automorphismes spéciaux de D^r est un k-groupe semi-simple simplement connexe de type ${}^1A_{rd-1}$.
Si $r \geq 2$, $\mathbf{G}$ est isotrope et on sait que $\mathbf{G}(k)^+ = [A^\times, A^\times]$. En particulier, le groupe $W(k, \mathbf{G})$ est abélien et on sait d'après Whitehead que

$$W(k, \mathbf{G}) \xrightarrow{\sim} SK_1(A) = \mathbf{SL}_1(A)(k)/[A^\times, A^\times] \xleftarrow{\sim} SK_1(D)$$

est indépendant de $r \geq 2$. Pour ce type de groupes, le problème de Kneser-Tits est donc l'étude du groupe $SK_1(A)$ ou $SK_1(D)$. Si l'on décompose $\mathrm{ind}_k(D) = p_1^{e_1}...p^{e_m}$ en facteurs premiers, on rappelle la décomposition (unique) de Brauer $D \xrightarrow{\sim} D_1 \otimes \cdots \otimes D_m$ où les D_i sont des algèbres à division de degrés respectifs $p_i^{e_i}$ (e.g. [**33**, §4.5]). L'identité

$$SK_1(D) \xrightarrow{\sim} SK_1(D_1) \oplus \cdots \oplus SK_1(D_m)$$

réduit alors l'étude au cas d'une algèbre d'indice p-primaire pour un premier p.

2.1. Le théorème de Wang et la rétracte k-rationalité de $\mathbf{SL}_1(A)$

Théorème 2.1 (Wang, 1950 [**105**], voir [**33**, §3]). — *On suppose $\mathrm{ind}_k(D)$ sans facteurs carrés. Alors $SK_1(D) = 0$ et le groupe $\mathbf{SL}_r(D)$ est W-trivial pour $r \geq 2$.*

Nous allons mettre en regard ce résultat et la rétracte k-rationalité de $\mathbf{SL}_1(A)$.

Définition 2.2. — *Soit $\mathbf{X}/k$ une k-variété (i.e. un k-schéma séparé de type fini) réduite et irréductible (intègre).*

1. *$\mathbf{X}$ est k-rationnelle si $\mathbf{X}$ est k-birationnelle à un espace affine.*
2. *$\mathbf{X}$ est stablement k-rationnelle s'il existe un entier $n \geq 0$ tel que $\mathbf{X} \times_k \mathbf{A}_k^n$ est k-birationnelle à l'espace affine.*
3. *$\mathbf{X}$ est facteur direct d'une variété k-rationnelle s'il existe une variété $\mathbf{Y}/k$ telle que $\mathbf{X} \times_k \mathbf{Y}$ est k-birationnelle à l'espace affine.*
4. *$\mathbf{X}$ est rétracte k-rationnelle s'il existe un ouvert non vide $\mathbf{U}$ de $\mathbf{X}$ tel que l'identité de $\mathbf{U}$ factorise à travers un ouvert $\mathbf{V}$ d'un espace affine $\mathbf{A}_k^m$, i.e. il existe des morphismes $f : \mathbf{U} \to \mathbf{V}$ et $r : \mathbf{V} \to \mathbf{U}$ tels que $r \circ f = id_{\mathbf{U}}$.*

On a 1) $\Longrightarrow$ 2) $\Longrightarrow$ 3) $\Longrightarrow$ 4). La rétracte k-rationalité est la variante birationnelle d'un rétracte d'un espace affine.

Lemme 2.3. — (1) *Soient A, B des algèbres simples centrales d'indices premiers entre eux. Alors $\mathbf{SL}_1(A \otimes_k B)$ est stablement k-birationnel à $\mathbf{SL}_1(A) \times \mathbf{SL}_1(B)$.*

(2) *Soient D une k-algèbre simple centrale à division et $D \cong D_1 \otimes \cdots D_m$ sa décomposition de Brauer. Alors pour tout entier $r \geq 1$, $\mathbf{SL}_r(D)$ est stablement k-birationnel à $\mathbf{SL}_1(D_1) \times \cdots \times \mathbf{SL}_1(D_m)$.*

Démonstration. — 1) On montre tout d'abord que

$$\mathrm{Nrd}(A \otimes_k B)^\times = \mathrm{Nrd}(A^\times) \cap \mathrm{Nrd}(B^\times).$$

On peut alors sans perte de généralité supposer momentanément A et B à division. Le groupe $\mathrm{Nrd}(A \otimes_k B)^\times$ est le sous-groupe de $k^\times$ engendré par les $N_{L/k}(L^\times)$ pour L/k parcourant les extensions finies de k trivialisant $A \otimes_k B$, c'est-à-dire trivialisant A et B. Ceci produit l'inclusion $\mathrm{Nrd}(A \otimes_k B)^\times \subset \mathrm{Nrd}(A^\times) \cap \mathrm{Nrd}(B^\times)$. Dans l'autre sens, on se donne $x \in k^\times$ tel que $x = \mathrm{Nrd}_A(a) = \mathrm{Nrd}_B(b)$. On considère alors une décomposition de Bezout $1 = m \deg(A) + n \deg(B)$ et on constate que $\mathrm{Nrd}(a^n \otimes b^m) = \mathrm{Nrd}_A(a^n)^{\deg(B)} \, \mathrm{Nrd}_B(b^m)^{\deg(A)} = x^{n \deg(B) + m \deg(A)} = x$, montrant l'inclusion ci-dessus. On a donc $\mathrm{Nrd}(A_F \otimes_F B_F)^\times = \mathrm{Nrd}(A_F^\times) \cap \mathrm{Nrd}(B_F^\times)$ pour toute extension de corps F/k. On note $\mathbf{H} \subset \mathbf{GL}_1(A) \times \mathbf{GL}_1(B)$ le sous-groupe défini par $\mathrm{Nrd}_A(a) = \mathrm{Nrd}_B(b) \neq 0$. Par construction, le groupe $\mathbf{H}$ est donc muni d'un caractère $\chi : \mathbf{H} \to \mathbf{G}_m$ tel que $\chi(\mathbf{H}(F)) = \mathrm{Nrd}(A_F \otimes_F B_F)^\times$ pour tout corps F/k. Selon une remarque de Chernousov-Merkurjev [**55**, prop. 4.5], ceci entraîne que les groupes $\mathbf{GL}_1(A \otimes B) \times \ker(\chi) = \mathbf{GL}_1(A \otimes B) \times \mathbf{SL}_1(A) \times \mathbf{SL}_1(B)$ et $\mathbf{SL}_1(A \otimes B) \times \mathbf{H}$ sont k-birationnels. De plus, on a une suite exacte scindée de k-groupes $1 \to \mathbf{H} \to \mathbf{GL}_1(A) \times \mathbf{GL}_1(B) \to \mathbf{G}_m \to 1$, donc $\mathbf{H} \times \mathbf{G}_m$ est k-isomorphe (comme k-variétés) à $\mathbf{GL}_1(A) \times \mathbf{GL}_1(B)$. On conclut que $\mathbf{SL}_1(A \otimes_k B)$ est stablement k-birationnel à $\mathbf{SL}_1(A) \times \mathbf{SL}_1(B)$.

2) On procède par récurrence sur m à partir de (1). □

Proposition 2.4 (Colliot-Thélène et Sansuc). — *On suppose* $\mathrm{ind}_k(D)$ *sans facteurs carrés. Alors pour tout entier $r \geq 1$, la variété $\mathbf{SL}_r(D)$ est rétracte k-rationnelle.*

Démonstration. — Le lemme précédent permet de supposer que $r = 1$ et $\mathrm{ind}_k(D) = p$ pour p premier. On note $\mathcal{T}$ la variété des tores maximaux du k-groupe $\mathbf{G} = \mathbf{SL}_1(D)$. On dispose d'une application rationnelle dominante $\mathbf{G} \to \mathcal{T}$ qui associe à tout élément semi-simple régulier de $\mathbf{G}$ son centralisateur [**103**, §4]. Ainsi $k(\mathbf{G}) = k(\mathcal{T})(\mathbf{T}_{\mathrm{gen}})$ où $\mathbf{T}_{\mathrm{gen}}/k(\mathcal{T})$ désigne le tore générique de $\mathbf{G}$. Selon Chevalley (*ibid.*), $\mathcal{T}$ est une variété k-rationnelle. Ensuite, le tore $\mathbf{T}_{\mathrm{gen}}$ est un tore normique, c'est-à-dire qu'il existe une extension de corps séparable $F/k(\mathcal{T})$ de degré p telle que $\mathbf{T}_{\mathrm{gen}} = \ker\Big(R_{F/k(\mathcal{T})}(\mathbf{G}_m) \overset{N_{F/k(\mathcal{T})}}{\longrightarrow} \mathbf{G}_{m,k(\mathcal{T})}\Big)$. Suivant [**21**, cor. 9.12], on sait que $\mathbf{T}_{\mathrm{gen}}$ est facteur direct d'une $k(\mathcal{T})$-variété rationnelle $V/k(\mathcal{T})$. Ainsi il existe un