326

ASTÉRISQUE

2009

SÉMINAIRE BOURBAKI
VOLUME 2007/2008
EXPOSÉS 982-996

(984) *Covolume des groupes S-arithmétiques et faux plans projectifs*

Bertrand RÉMY

SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE
Publié avec le concours du CENTRE NATIONAL DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

Séminaire BOURBAKI Novembre 2007
60e année, 2007–2008, no 984, p. 83 à 129

COVOLUME DES GROUPES S-ARITHMÉTIQUES ET FAUX PLANS PROJECTIFS [d'après Mumford, Prasad, Klingler, Yeung, Prasad-Yeung]

par **Bertrand RÉMY**

À la fin des années 1980, G. Prasad a mis en évidence une formule calculant le covolume (convenablement normalisé) d'un groupe S-arithmétique dans le groupe topologique (produit de groupes algébriques) qui le contient naturellement [**49**]. Il y a un peu plus d'un an, G. Prasad et S.K. Yeung ont prouvé que les possibilités de construction de faux plans projectifs (des surfaces de type général définies par des conditions topologiques simples) étaient extrêmement restreintes, tout en exhibant de nouveaux exemples [**50**]. Le but de cet exposé est d'expliquer le lien entre ces deux résultats et de faire un résumé succinct de chacune de leurs preuves. Autrement dit, c'est l'occasion d'aborder des mathématiques assez variées : groupes algébriques sur les corps locaux, géométrie complexe, arithmétique des corps de nombres... ayant néanmoins toutes un rapport avec les sous-groupes discrets des groupes de Lie, ou les généralisations obtenues en considérant le groupe fondamental de variétés particulières. On revient notamment sur la formule de G. Prasad, publiée peu de temps après le calcul des nombres de Tamagawa des groupes réductifs sur les corps de nombres [**35**]. On évoque aussi des problèmes encore ouverts en matière de réseaux de groupes de Lie [**37**, Appendix C], ainsi que d'autres résultats de finitude et de comptage, concernant par exemple le nombre de classes des groupes algébriques sur les corps globaux et le comptage asymptotique (suivant le volume) des variétés couvertes par un espace symétrique donné.

Commençons par les considérations géométriques. Un *faux plan projectif* est une surface analytique complexe lisse, compacte et avec les mêmes nombres de Betti que $\mathbb{P}^2(\mathbf{C})$, mais non homéomorphe à celui-ci. Des arguments classiques permettent de voir qu'un faux plan projectif est une variété projective (2.1). En outre, les travaux de S.-T.Yau sur les métriques de Kähler-Einstein permettent de voir que c'est aussi une variété localement symétrique (le revêtement universel est la boule hyperbolique complexe). Les faux plans projectifs existent : D. Mumford a construit le premier exemple par uniformisation non archimédienne (3.5) ; ils sont en nombre fini : on peut le déduire d'arguments de rigidité (2.2). Soit donc X une telle surface. Le groupe fondamental Γ de X est un sous-groupe discret, cocompact et sans torsion de $\mathrm{PU}(2,1)$. Le lien entre la formule de covolume des groupes S-arithmétiques (1.2) et les faux plans projectifs est bien sûr fourni par Γ. Encore faut-il savoir que c'est un groupe arithmétique. Ceci signifie, en gros, qu'on peut le voir comme un groupe de matrices à coefficients dans l'anneau des entiers d'un corps de nombres. C'est un problème difficile, qui a été résolu il y a peu par B. Klingler et S.K. Yeung, indépendamment (voir le théorème 2.9 pour une mise en contexte).

Théorème 0.1 (B. Klingler [**34**] et S.K. Yeung [**71**]). — *Les faux plans projectifs sont des quotients arithmétiques de la boule hyperbolique complexe* $\mathbb{B}^2_{\mathbf{C}}$.

La réduction de ce résultat d'arithméticité à la preuve de résultats de super-rigidité est classique, et due à G.A. Margulis. La *super-rigidité*, pour une classe d'homomorphismes d'un sous-groupe discret donné (contenu dans un groupe algébrique donné) vers des groupes de Lie simples, est le phénomène selon lequel tout homomorphisme dans cette classe ou bien est d'image relativement compacte, ou bien s'étend en un homomorphisme de groupes algébriques. Les démonstrations de super-rigidité pour le théorème ci-dessus utilisent la notion d'application harmonique qui a été présentée par P. Pansu dans un précédent séminaire Bourbaki [**45**]. B. Klingler et S.K. Yeung doivent utiliser de récents développements dans lesquels les espaces d'arrivée des applications harmoniques sont des complexes simpliciaux. Ici les espaces singuliers en question sont des immeubles de Bruhat-Tits, c'est-à-dire des analogues d'espaces symétriques pour les groupes de Lie semi-simples non archimédiens.

Passons au volume des quotients de groupes algébriques par des sous-groupes discrets. Un problème proche est celui du calcul des nombres de Tamagawa [**69**] : il porte sur les quotients de groupes adéliques. Nous nous intéressons au problème analogue, mais avec un groupe ambiant qui est un produit fini de groupes de points rationnels d'un groupe algébrique sur un corps global. Précisément, soit $\mathbf{G}$ un groupe algébrique défini sur un corps de nombres k. On note V_f (resp. V_∞) l'ensemble des places finies (resp. infinies) de k et $G_S = \prod_{v \in V_S} \mathbf{G}(k_v)$ le produit des points de $\mathbf{G}$ aux places $v \in S$, pour S une partie finie de places telle que $V_\infty \subseteq S$. On suppose que $\mathbf{G}$ est *absolument presque simple*, i.e. $\mathbf{G}(\mathbf{C})$ n'a pas de sous-groupe normal non trivial, fermé et connexe pour la topologie de Zariski. Pour chaque $v \notin S$, la théorie de Bruhat-Tits distingue une famille de sous-groupes compacts et ouverts, les sous-groupes parahoriques, qui possèdent de bonnes propriétés combinatoires (1.1). Un sous-groupe *S-arithmétique principal* de G_S est par définition la projection dans G_S d'un groupe $\mathbf{G}(k) \cap \prod_{v \notin S} P_v$ pour une famille $(P_v)_{v \notin S}$ de sous-groupes parahoriques $P_v \subset \mathbf{G}(k_v)$ telle que $G_S \times \prod_{v \notin S} P_v$ soit ouvert dans le groupe adélique $\mathbf{G}(\mathbf{A}_k)$.

THÉORÈME 0.2 (G. Prasad [**49**]). — *On suppose que le k-groupe algébrique* $\mathbf{G}$ *est simplement connexe. Alors, pour une normalisation convenable des mesures de Haar, il existe une formule explicite pour le volume du quotient de G_S par un sous-groupe S-arithmétique principal.*

Cette formule, qui est valide aussi pour les corps de fonctions (voir le théorème 1.1 pour les détails techniques), est un produit de cinq facteurs. Tous ces facteurs sont de nature arithmétique (via les valeurs absolues des discriminants de k et d'une extension de déploiement, ou les nombres de Tamagawa) ou relèvent de la théorie de Lie (via divers systèmes de racines liés à $\mathbf{G}$). L'un d'eux est un produit infini indexé par les $v \notin S$, dont les facteurs sont liés au volume des sous-groupes parahoriques ; il peut s'interpréter en termes de fonctions ζ et de fonctions L d'extensions du corps de base k. C'est le facteur le plus intéressant et le plus difficile à appréhender ; dans le cas où $\mathbf{G} = \mathrm{SL}_2$ et $k = \mathbf{Q}$, il vaut $\zeta(2) = \frac{\pi^2}{6}$.

Le comptage des faux plans projectifs utilise les deux théorèmes déjà cités. Le lien entre ces surfaces complexes et la théorie de Lie est une formule de Gauss-Bonnet mise en évidence par J.-P. Serre dans le cadre général des variétés localement symétriques [**58**] : la caractéristique d'Euler-Poincaré de la surface peut être interprétée comme le covolume (convenablement normalisé) du groupe fondamental dans le groupe des isométries du revêtement universel. Il s'agit donc de compter les corps de nombres k et les k-groupes algébriques dont les points aux places réelles sont des groupes compacts, sauf en une place où l'on obtient $\mathrm{PU}(2,1) = \mathrm{Isom}(\mathbb{B}^2_{\mathbf{C}})$. Il s'agit aussi de dénombrer, par des méthodes de théorie des nombres, les familles de sous-groupes parahoriques $(P_v)_{v \in V_\infty}$ qui donnent lieu à des groupes arithmétiques sans torsion et de covolume imposé par la caractéristique d'Euler-Poincaré de la surface. Voici un résumé du résultat final (voir le théorème 3.5 pour les détails techniques).

THÉORÈME 0.3 (G. Prasad et S.K. Yeung [**50**], [**51**]). — *Il y a exactement* 22 *classes de faux plans projectifs construits grâce à des formes de* $\mathrm{SU}(2,1)$ *définies par des algèbres à involutions cubiques sur un corps de nombres. Tout autre faux plan projectif proviendrait de l'autre type possible de forme de* $\mathrm{SU}(2,1)$ *; il y a au plus* 3 *telles possibilités.*

L'intérêt de ce théorème réside tout autant dans sa partie constructive que dans la classification qu'il énonce : on connaissait très peu d'exemples auparavant, tous construits par une méthode détournée (3.5). On s'attend en fait à ce que les faux plans projectifs se répartissent dans les 22 classes déjà répertoriées, et dans elles seules. Le fait de pouvoir décrire ces surfaces par la construction arithmétique explicite de leur groupe fondamental permet de prouver de nombreuses propriétés géométriques inconnues auparavant : homologie entière, groupes d'automorphismes, plongements dans des espaces projectifs...

Nous avons pris la liberté d'ajouter quelques pages à ce rapport (déjà bien long) en survolant rapidement d'autres problèmes de comptage. Il s'agit d'une part des propriétés de finitude liées aux groupes algébriques et arithmétiques, qu'A. Borel et G. Prasad avaient déduites au moment où ce dernier avait démontré la formule du covolume. L'une des finitudes est une conjecture de J. Tits très forte sur la finitude, sans fixer le corps de base, du nombre de situations donnant lieu à des groupes S-arithmétiques principaux de covolume majoré par une constante donnée ; l'autre porte sur des estimations effectives du nombre de classes des groupes algébriques. L'autre série de résultats évoqués est le problème du comptage asymptotique des variétés couvertes par un espace symétrique donné, en fonction du volume riemannien. Il s'agit de travaux de M. Burger, T. Gelander, A. Lubotzky et Sh. Mozes dans le cas des variétés hyperboliques réelles et de T. Gelander dans le cas symétrique (presque) général. Évoquer ces travaux est l'occasion de démontrer que le spectre des mathématiques couverts par les questions de covolumes de groupes arithmétiques est bien large (le cas limite, non couvert par les résultats de comptage de géométrie différentielle ci-dessus, s'explique par des arguments de géométrie hyperbolique de dimension 3).

Terminons par deux remarques. Tout d'abord, nous imaginons que pour un spécialiste de réseaux de groupes de Lie, il sera plaisant de se pencher sur l'exemple très spécifique des faux plans projectifs pour au moins une raison. Cette classification est en effet l'occasion de revenir de façon quantitative, ou tout du moins précise, sur des outils ordinairement utilisés de façon qualitative en théorie des groupes : lemme de Selberg pour les sous-groupes d'indice fini sans torsion, finitude des groupes d'automorphismes de variétés localement symétriques... Enfin, nous espérons que bien qu'elle n'ait pas fait l'objet ici d'une présentation isolée et construite, la théorie de Bruhat-Tits des groupes réductifs sur les corps locaux apparaîtra comme un outil important, au-delà de la théorie des groupes. Cette théorie apparaît en effet à plusieurs endroits : sous forme algébrique, à travers les structures entières des sous-groupes parahoriques utilisées pour calculer le volume de ces derniers (1.4), et sous forme géométrique, en voyant des immeubles euclidiens comme espaces d'arrivée d'applications harmoniques (2.5) et comme « squelettes » d'espaces analytiques rigides dans la construction de D. Mumford du premier faux plan projectif (3.5).

Ce rapport est construit de la façon suivante. Dans la section 1, on énonce précisément la formule du covolume et on esquisse sa preuve. Dans la section 2, c'est la preuve de l'arithméticité des groupes fondamentaux des faux plans projectifs qui est résumée ; on y cite aussi des résultats utiles à l'explication des résultats géométriques de la section 4. Dans la section 3, on explique la stratégie générale pour classer les