363-364 ASTÉRISQUE

2015

SÉMINAIRE BOURBAKI
VOLUME 2013/2014
EXPOSÉ N° 1078

Nicolas BERGERON

Toute variété de dimension 3 compacte et asphérique est virtuellement de Haken

SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE
Publié avec le concours du CENTRE NATIONAL DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

Astérisque est un périodique de la Société Mathématique de France.

Numéro 367-368

Diffusion

Maison de la SMF
Case 916 - Luminy
13288 Marseille Cedex 9
France
smf@smf.univ-mrs.fr

Hindustan Book Agency
O-131, The Shopping Mall
Arjun Marg, DLF Phase 1
Gurgaon 122002, Haryana
Inde

AMS
P.O. Box 6248
Providence RI 02940
USA
www.ams.org

Tarifs

Vente au numéro : 90 € ($ 135)

Abonnement Europe : 650 €, hors Europe : 689 € ($ 1 033)

Des conditions spéciales sont accordées aux membres de la SMF.

Secrétariat : Nathalie Christiaën

Astérisque
Société Mathématique de France
Institut Henri Poincaré, 11, rue Pierre et Marie Curie
75231 Paris Cedex 05, France
Tél : (33) 01 44 27 67 99 • Fax : (33) 01 40 46 90 96
revues@smf.ens.fr • http://smf.emath.fr/

ISSN 0303-1179

ISBN 978-2-85629-804-6

Directeur de la publication : Marc PEIGNÉ

Séminaire BOURBAKI Janvier 2014
66e année, 2013-2014, n° 1078, p. 115 à 150

TOUTE VARIÉTÉ DE DIMENSION 3 COMPACTE ET ASPHÉRIQUE EST VIRTUELLEMENT DE HAKEN [d'après Ian Agol et Daniel T. Wise]

par **Nicolas BERGERON**

Sauf mention contraire, dans tout ce rapport le terme *variété* désigne une variété lisse, connexe, orientable et sans bord, et *surface* une variété de dimension 2. Un choix indifférent de point base est effectué lorsque l'on parle du groupe fondamental d'un espace connexe par arc, et un choix approprié de points bases est effectué lorsque l'on parle de morphisme entre groupes fondamentaux.

INTRODUCTION

Soit M une variété compacte de dimension 3 compacte et *asphérique*, autrement dit dont le revêtement universel est contractile.[(1)] Dans les annés 60 les topologues ont dégagé la définition suivante.

Définition 0.1. — *La variété M est dite* de Haken *si M contient une surface plongée (de genre non nul) et* incompressible, *c'est-à-dire telle que l'inclusion induise une injection au niveau des groupes fondamentaux.*

Wolfgang Haken [**26**] montre en effet que si M contient une surface S plongée et incompressible, découper M le long de S donne une variété *à bord* de dimension 3 qui est « plus simple ». Mieux, Haken montre que la variété à bord ainsi obtenue contient encore une surface incompressible (au sens adapté aux variétés à bord) selon laquelle on peut à nouveau la découper et il montre qu'après un nombre fini d'étapes on obtient une union finie de polyèdres à coins cubiques (homéomorphes à des cellules de dimension 3). On dit aussi que M possède une *hiérarchie (de Haken).*

À la fin des années 70, William Thurston révolutionne la topologie de la dimension 3 en liant topologie et géométrie. Dans son article-programme [**46**], il énonce sa célèbre

(1) Cette dernière hypothèse permet d'éviter les complications liées aux sommes connexes et à la conjecture de Poincaré, difficultés par ailleurs maintenant bien comprises.

conjecture de géométrisation en tête d'un programme de 24 questions qui visent à une compréhension profonde des variétés de dimension 3. Lorsque M est une variété de Haken, Thurston montre que les pièces de la décomposition par tores incompressibles de Jaco-Shalen et Johansson de M admettent l'une des huit « géométries de Thurston », le tour de force pour les pièces hyperbolisables étant, après l'hyperbolisation des polyèdres à coins cubiques résultant d'une hiérarchie de Haken, de remonter la hiérarchie à l'aide d'applications de recollements ; voir par exemple [**31, 35**].

Mais Thurston montre aussi qu'en un certain sens la plupart des variétés de dimension 3 ne sont pas de Haken et construit en particulier de nombreux exemples de variétés hyperboliques qui ne sont pas de Haken. Parmi ses 24 questions, il reprend néanmoins la conjecture suivante d'abord proposée par Friedhelm Waldhausen [**47**] (et qui aurait permis de ramener la conjecture de géométrisation au cas des variétés de Haken).

CONJECTURE 0.2. — *Soit M une variété de dimension* 3 *compacte et asphérique, alors M possède un revêtement fini qui est une variété de Haken.*

Depuis l'article originel de Thurston, la plupart des 24 questions ont été résolues[(2)] notamment la conjecture de géométrisation démontrée par Grigori Perelman en 2002, voir par exemple [**10**]. Jusqu'à tout récemment seules restaient ouvertes la conjecture de Waldhausen (plus trois de ses avatars dont nous parlerons plus loin) et une question de nature plus arithmétique. Depuis la démonstration par Perelman de la conjecture de géométrisation, la conjecture de Waldhausen ne restait plus ouverte que dans le cas où la variété M est hyperbolique, autrement dit peut être munie d'une métrique riemannienne à courbure sectionnelle constante égale à -1. L'objet de ce rapport est de donner les grandes lignes de la démonstration du théorème suivant par Ian Agol.

THÉORÈME 0.3. — *Soit M une variété hyperbolique compacte de dimension* 3*, alors M possède un revêtement fini qui est une variété de Haken.*

Notons toutefois que la démonstration de la conjecture 0.2 utilise la conjecture de géométrisation, elle ne permet donc pas d'en donner une nouvelle démonstration.

Grandes étapes de la démonstration. — La première étape fondamentale est un théorème de Jeremy Kahn et Vladimir Markovic qui implique que M contient « beaucoup » de surfaces incompressibles mais qui sont seulement *immergées*. Peu de temps avant que Kahn et Markovic démontrent leur théorème, Dani Wise et ses co-auteurs, dont en particulier Frédéric Haglund, dégageaient de leur côté le concept de *complexe cubique spécial*. Un complexe cubique à courbure négative ou nulle est un bel

(2) Les solutions confirmant toutes les intuitions de Thurston ; on renvoie à la recension [**39**] par Jean-Pierre Otal pour un « état de l'art » détaillé.

objet combinatoire avec des hypersurfaces naturelles. En outre le complexe cubique se « rappelle » la manière dont ces hypersurfaces s'intersectent ; il est dit spécial si certaines pathologies d'intersections sont interdites, en particulier les hypersurfaces doivent être plongées. Une construction de Michah Sageev permet de lier ces travaux : avec Wise nous déduisons en effet du théorème de Kahn et Markovic que si M est une variété hyperbolique compacte de dimension 3 alors M a le même groupe fondamental qu'un complexe cubique à courbure négative ou nulle. Reste que ce complexe n'est en général pas *spécial*, le résultat ne dit donc rien sur la manière dont les hypersurfaces s'intersectent.

La dernière (et principale) étape est franchie par Agol en avril 2012 : *tout complexe cubique compact à courbure négative ou nulle dont le groupe fondamental est hyperbolique possède un revêtement fini qui est spécial*; voir le théorème 1.13. On notera que ce résultat était conjecturé par Wise et que la démonstration d'Agol fait un usage essentiel des travaux de Wise sur les complexes cubiques spéciaux.

Le théorème d'Agol a de nombreux corollaires : le groupe fondamental d'une variété hyperbolique compacte de dimension 3 possède un sous-groupe d'indice fini qui se surjecte sur un groupe libre non élémentaire, possède un sous-groupe d'indice fini qui est bi-ordonnable, s'injecte dans $\mathrm{GL}(n, \mathbf{Z})$ pour un certain n, *etc.* Au point que Danny Calegari [**14**] n'a pas hésité à écrire

> "It is hard to think of a question about fundamental groups of hyperbolic 3-manifolds that it doesn't answer."

Agol déduit enfin de son théorème que toute variété hyperbolique compacte de dimension 3 possède un revêtement fini qui est homéomorphe à la suspension d'une surface compacte par un difféomorphisme.

Organisation du rapport. — La première section se veut une introduction rapide aux complexes cubiques (spéciaux) motivée par la démonstration du théorème 0.3. Le but est d'énoncer et de motiver le théorème 1.13. On s'adresse à un mathématicien familier des concepts de « groupe hyperbolique » ou d'« espace CAT(0) ». Le livre [**12**] pourra parfaitement servir d'ouvrage de référence pour une introduction à ces concepts.

Dans les sections suivantes on cherche à fournir au lecteur un guide à travers les travaux d'Agol et Wise. La lecture est par conséquent plus technique.

1. DES VARIÉTÉS HYPERBOLIQUES AUX COMPLEXES CUBIQUES

1.1. Sous-espaces géométriquement incompressibles

Commençons par généraliser la notion de surface incompressible.