363-364

ASTÉRISQUE

2015

SÉMINAIRE BOURBAKI
VOLUME 2013/2014
EXPOSÉ Nº 1079

Vincent COLIN

Réalisations géométriques de l'homologie de Khovanov par des homologies de Floer

SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE

Publié avec le concours du CENTRE NATIONAL DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

Astérisque est un périodique de la Société Mathématique de France.

Numéro 367-368

Diffusion

Maison de la SMF	Hindustan Book Agency	AMS
Case 916 - Luminy	O-131, The Shopping Mall	P.O. Box 6248
13288 Marseille Cedex 9	Arjun Marg, DLF Phase 1	Providence RI 02940
France	Gurgaon 122002, Haryana	USA
`smf@smf.univ-mrs.fr`	Inde	`www.ams.org`

Tarifs

Vente au numéro : 90 € ($ 135)

Abonnement Europe : 650 €, hors Europe : 689 € ($ 1 033)

Des conditions spéciales sont accordées aux membres de la SMF.

Secrétariat : Nathalie Christiaën

Astérisque

Société Mathématique de France

Institut Henri Poincaré, 11, rue Pierre et Marie Curie

75231 Paris Cedex 05, France

Tél : (33) 01 44 27 67 99 • Fax : (33) 01 40 46 90 96

`revues@smf.ens.fr` • `http://smf.emath.fr/`

ISSN 0303-1179

ISBN 978-2-85629-804-6

Directeur de la publication : Marc PEIGNÉ

Séminaire BOURBAKI Janvier 2014
66e année, 2013-2014, n° 1079, p. 151 à 177

RÉALISATIONS GÉOMÉTRIQUES DE L'HOMOLOGIE DE KHOVANOV PAR DES HOMOLOGIES DE FLOER [d'après Abouzaid-Seidel-Smith et Ozsváth-Szabó]

par **Vincent COLIN**

1. INTRODUCTION

L'*homologie de Khovanov* [**5, 6**] associe un groupe d'homologie bigradué $\mathrm{Kh}(L)_{*,*}$ à tout entrelacs L de $\mathbb{R}^3$. La première graduation, notée p par la suite, est un degré homologique classique ; l'autre, q, provient d'une filtration spécifique. Cette théorie possède plusieurs propriétés remarquables :

1. sa caractéristique d'Euler filtrée donne, après normalisation, le polynôme de Jones [**5**] (on parle de *catégorification* du polynôme de Jones) ;
2. c'est une *TQFT* de dimension $1+1$ [**4, 7**] : en particulier, tout cobordisme S entre des entrelacs L_1 et L_2 induit un morphisme $\mathscr{A}(S) : \mathrm{Kh}(L_1) \to \mathrm{Kh}(L_2)$;
3. elle détecte le genre slice des nœuds toriques (Rasmussen [**18**]) et donne ainsi une preuve combinatoire du théorème de Kronheimer et Mrowka [**10**] (conjecture de Milnor) ;
4. elle fournit une borne supérieure pour l'invariant de Thurston-Bennequin d'un nœud legendrien dans l'espace de contact standard, qui est optimale pour tous les nœuds à moins de 10 croisements (sauf deux !) (Ng [**13**]) ;
5. elle détecte le nœud trivial (Kronheimer et Mrowka [**11**]).

Pour autant, la définition combinatoire de l'homologie de Khovanov rend son champ d'application potentiel difficile à évaluer. C'est pourquoi il est intéressant d'en construire des versions géométriques. Dans [**16**], Ozsváth et Szabó relient l'homologie de Khovanov d'un entrelacs $L \subset S^3$ à l'*homologie de Heegaard-Floer* d'un revêtement double de la sphère S^3 ramifié au-dessus du miroir de L. En 2005, Seidel et Smith [**23**] définissent une *homologie de Khovanov symplectique*. Elle est isomorphe à l'homologie de Khovanov par des travaux récents d'Abouzaid et Smith [**1**] prolongeant ceux de Rezazadegan [**20, 19**]. L'objectif de cet exposé est de décrire ces liens.

Ces deux approches géométriques de l'homologie de Khovanov ne sont pas les seules. On peut citer également le travail de Cautis et Kamnitzer **[2]**, motivé par la symétrie miroir homologique et qui décrit l'homologie de Khovanov en terme de catégorie dérivée des faisceaux cohérents, ainsi qu'une approche de Witten **[29, 28]** par la théorie de jauge.

J'adresse un grand merci à Mohammed Abouzaid, Baptiste Chantraine, Paolo Ghiggini, Ko Honda, Reza Rezazadegan et Ivan Smith dont les explications ont été très précieuses.

2. HOMOLOGIE DE KHOVANOV

La propriété fonctorielle (2) permet de réduire l'homologie de Khovanov à sa valeur sur le nœud trivial et à ses propriétés de transformation par cobordismes élémentaires. Pour l'homologie de Khovanov, le groupe (espace vectoriel) associé au nœud trivial est $V = H^*(S^2, \mathbb{Z}/2)^{(1)}$. Des choix différents sont possibles. C'est ainsi que Khovanov et Rozansky **[8, 9]** fournissent une famille d'homologies indexée par les entiers $n \geq 1$ qui « catégorifient » les polynômes de Jones colorés. Le cas $n = 0$, qui catégorifierait le polynôme d'Alexander, s'obtient par d'autres méthodes qui conduisent à l'homologie de Heegaard-Floer des entrelacs.

2.1. La définition de Khovanov

Soient L un entrelacs de $\mathbb{R}^3$ et D un diagramme de L obtenu par projection générique sur un plan. La courbe D est immergée et à points doubles transverses et distincts. On numérote les points doubles de 1 à k. Chaque point double peut se résoudre de deux manières : la 0- et la 1-résolution, comme indiqué sur la figure 1.

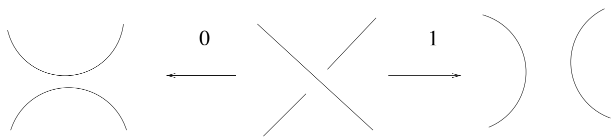

FIGURE 1. Les 0-et 1-résolutions d'un croisement

Étant donné un sommet $I = (i_1, \ldots, i_k) \in \{0,1\}^k$ du cube $[0,1]^k$, on note D_I la collection de cercles, résolution complète de D, obtenue en prenant, pour tout $1 \leq j \leq k$,

(1) On prend ici des coefficients dans $\mathbb{Z}_2$. L'homologie peut également se définir à coefficients dans $\mathbb{Z}$ et ses propriétés fonctorielles sont alors établies à coefficients dans $\mathbb{Q}$. Le théorème d'Abouzaid-Smith est annoncé uniquement pour les coefficients rationnels.

la i_j-résolution du j-ième croisement de D. On note également n_I le nombre de cercles de D_I et $\mathcal{A}(D_I) = V^{\otimes n_I}$.

On considère le complexe

$$\mathrm{CKh}(L) = \bigoplus_{I \in \{0,1\}^k} \mathcal{A}(D_I).$$

Les éléments x de $\mathcal{A}(D_I)$ ont tous le même *degré cohomologique* qui vaut

$$\mathrm{gr}(x) := |I| - n_-,$$

où $|I|$ est le nombre de coordonnées de I égales à 1 et n_- le nombre de croisements négatifs de D. (Respectivement, on note n_+ le nombre de croisements positifs de D.) Pour aller plus loin, on décompose $V = H^*(S^2, \mathbb{Z}_2)$ en $\mathbb{Z}_2 v_- \oplus \mathbb{Z}_2 v_+$, où $v_- \in H^0(S^2, \mathbb{Z}/2)$ et $v_+ \in H^2(S^2, \mathbb{Z}_2)$. Dans certains textes, v_+ est noté 1 et v_- noté x. On définit le degré p par

$$p(v_1 \otimes \cdots \otimes v_{n_l}) = p(v_1) + \cdots + p(v_{n_I})$$

avec $p(v_\pm) = \pm 1$.

Le *degré filtré* q (aussi appelé *degré quantique*) est donné par :

$$q(v_1 \otimes \cdots \otimes v_{n_I}) := p(v_1 \otimes \cdots \otimes v_{n_I}) + \mathrm{gr}(v_1 \otimes \cdots \otimes v_{n_I}) + n_+ - n_-.$$

Chaque arête e du cube $[0,1]^k$ entre deux sommets I et I' correspond au passage d'une 0-résolution à une 1-résolution sur un des croisements et donc à un cobordisme élémentaire $\mathcal{S}_e$ de type selle qui voit (i) deux cercles de D_I se rejoindre pour n'en former qu'un dans $D_{I'}$, ou (ii) un cercle de D_I se séparer en deux cercles de $D_{I'}$. Ici, les arêtes sont orientées et ont pour origine le sommet $I = e(0)$ qui correspond à la 0-résolution. À chaque opération, on associe un morphisme élémentaire $\mathcal{A}(\mathcal{S}_e) : \mathcal{A}(D_I) \to \mathcal{A}(D_{I'})$, multiplication $m : \mathcal{A}(D_I) \to \mathcal{A}(D_{I'})$ dans le cas (i) et comultiplication $\Delta : \mathcal{A}(D_I) \to \mathcal{A}(D_{I'})$ dans le cas (ii).

Précisément, la multiplication $m : V^{\otimes 2} \to V$ est donnée par les formules :

$$m(v_+ \otimes v_+) = v_+, \;\; m(v_+ \otimes v_-) = m(v_- \otimes v_+) = v_- \;\text{ et }\; m(v_- \otimes v_-) = 0.$$

Les facteurs $V^{\otimes 2}$ à la source ont pour indices dans $V^{\otimes n_I}$ ceux des cercles de D_I qui se rejoignent et le facteur V au but a pour indice celui du cercle créé dans $D_{I'}$. Similairement, on définit la comultiplication $\Delta : V \to V^{\otimes 2}$ par :

$$\Delta(v_+) = v_+ \otimes v_- + v_- \otimes v_+ \;\text{ et }\; \Delta(v_-) = v_- \otimes v_-.$$

Alternativement, on peut voir $\mathcal{A}(D_I)$ comme l'algèbre extérieure $\Lambda(H_1(D_I, \mathbb{Z}_2))$, où on identifie le générateur de la k-ième composante de D_I dans $H_1(D_I)$ avec le facteur v_- pour cette composante (le facteur v_+ étant identifié avec $1 \in \mathbb{Z}_2$). Dans ce cas, les opérations m et Δ sont les applications $\Lambda(H_1(D_I)) \to \Lambda(H_1(D_{I'}))$ induites par (i) passage au quotient par $[\Gamma_{i_0}] = [\Gamma_{i_1}] = [\Gamma'_{i_2}]$ si les composantes $[\Gamma_{i_0}]$