363-364

ASTÉRISQUE

2015

SÉMINAIRE BOURBAKI
VOLUME 2013/2014
EXPOSÉ N° 1080

Tristan RIVIÈRE

Méthodes de min-max et la conjecture de Willmore

SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE
Publié avec le concours du CENTRE NATIONAL DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

Astérisque est un périodique de la Société Mathématique de France.

Numéro 367-368

Diffusion

Maison de la SMF	Hindustan Book Agency	AMS
Case 916 - Luminy	O-131, The Shopping Mall	P.O. Box 6248
13288 Marseille Cedex 9	Arjun Marg, DLF Phase 1	Providence RI 02940
France	Gurgaon 122002, Haryana	USA
smf@smf.univ-mrs.fr	Inde	www.ams.org

Tarifs

Vente au numéro : 90 € ($ 135)

Abonnement Europe : 650 €, hors Europe : 689 € ($ 1 033)

Des conditions spéciales sont accordées aux membres de la SMF.

Secrétariat : Nathalie Christiaën

Astérisque

Société Mathématique de France

Institut Henri Poincaré, 11, rue Pierre et Marie Curie

75231 Paris Cedex 05, France

Tél : (33) 01 44 27 67 99 • Fax : (33) 01 40 46 90 96

revues@smf.ens.fr • http://smf.emath.fr/

ISSN 0303-1179

ISBN 978-2-85629-804-6

Directeur de la publication : Marc PEIGNÉ

Séminaire BOURBAKI Janvier 2014
66^e année, 2013-2014, n^o 1080, p. 179 à 217

MÉTHODES DE MIN-MAX ET LA CONJECTURE DE WILLMORE [d'après F.C. Marques et A.A. Neves]

par **Tristan RIVIÈRE**

INTRODUCTION

L'étude des variations de lagrangiens, c'est-à-dire la recherche de leurs points critiques, de leur indice, de la topologie de leurs ensembles de niveau, etc., sont des problématiques anciennes des mathématiques qui vont bien au-delà du strict champ du calcul des variations et de l'analyse en général. Elles ont eu des impacts importants dans bien d'autres domaines comme la topologie différentielle, la géométrie différentielle et riemannienne ou encore la géométrie algébrique complexe, etc. (théorie de Morse, théorie de jauge, espaces de modules, etc.).

Une problématique délicate du calcul des variations consiste à identifier des points critiques autrement que par simple procédure de minimisation, en d'autres termes, la recherche de points selles. Au début du XX^e siècle, G. D. Birkhoff, dans son étude de l'existence de géodésiques fermées dans l'espace des courbes homotopiques à un point sur une variété compacte sans bord, a développé avec succès une technique dite de « min-max ». Cette approche telle qu'il l'a conçue s'est avérée très performante aussi longtemps que l'on travaille avec des objets 1-dimensionnels.

La théorie de la mesure géométrique, telle qu'elle a émergé au début des années 50, fusionnant la théorie des courants de de Rham avec la notion d'ensemble rectifiable étudiée en particulier par A. Besicovitsch les décennies précédentes, était motivée par des problèmes généraux de minimisation de volume pour des sous-variétés (ou plus exactement de leur version affaiblie : des courants entiers rectifiables) sous différentes contraintes de bord ou plus généralement d'homologie. Ce genre de questions avaient elles-mêmes leur origine dans le fameux problème de Plateau consistant à chercher un disque « optimal » bordant une courbe de Jordan dans un espace euclidien donné. La théorie de la mesure géométrique, au-delà des questions de minimisation, s'est progressivement emparée de la question de trouver des points selles et c'est autour des années 70 que F. Almgren et J. Pitts donnèrent le cadre d'une méthode de min-max, inspirée de Birkhoff, pour des objets très généraux comme les courants rectifiables.

Il y a bientôt 2 ans, F.C. Marques et A. Neves ont mis en œuvre cette méthode de min-max dans le cadre des courants rectifiables fermés de dimension 2 dans la sphère 3-dimensionnelle pour des déformations correspondant, entre autres, à l'action du groupe des transformations conformes. Ils sont ainsi parvenus à mettre en évidence une surface minimale, de courbure moyenne nulle, qui minimise l'aire parmi toutes les autres surfaces minimales fermées de genre non nul. Le calcul précis de l'indice de cette surface leur a permis d'identifier cette surface comme étant le fameux tore de Clifford. Une des conséquences spectaculaires de ce résultat est la démonstration de la conjecture dite « de Willmore » qui prédisait la forme optimale des surfaces de genre non nul minimisant le lagrangien du même nom, introduit dans le cadre de la géométrie conforme par W. Blaschke au début du XX$^{\text{e}}$ siècle dans son effort de fusionner l'invariance conforme et la théorie des surfaces minimales.

I. L'ORIGINE DES MÉTHODES DE MIN-MAX ET LA RECHERCHE DE GÉODÉSIQUES FÉRMÉES

Trouver une courbe dans une variété riemannienne (M, g) connexe fermée minimisant la longueur sous une contrainte homologique ou homotopique simple comme par exemple celle de prescrire ses extrémités lorsqu'elle n'est pas fermée ou comme celle d'appartenir à une classe d'homotopie donnée du $\pi_1(M)$ lorsque la courbe est un cercle est peut-être l'exercice le plus élémentaire du calcul des variations. Cet exercice consiste essentiellement à s'assurer que l'espace des courbes dans lequel on pose le problème est bien fermé pour cette opération de minimisation et à faire un petit travail de preuve de régularité sur le minimum obtenu.

La question devient plus délicate lorsque l'on se pose la question de trouver une géodésique fermée sur un espace simplement connexe comme la sphère S^2 équipée d'une métrique quelconque. Cette question fut probablement considérée pour la première fois dans les travaux d'Hadamard [**23**] et de Poincaré [**37**] vers le début du XX$^{\text{e}}$ siècle.

G. D. Birkhoff a développé une méthode dite de *« min-max »* afin de démontrer le résultat suivant.

THÉORÈME I.1 ([**4**]). — *Toute variété riemannienne homéomorphe à la sphère possède une géodésique fermée non triviale.*

L'idée principale de la preuve est la suivante. On considère l'espace $\mathscr{C}$ des applications continues de S^1 dans S^2 régulières par morceaux que l'on quotiente par l'action des homéomorphismes positifs et réguliers par morceaux de S^1, espace que l'on « compactifie » en rajoutant les points de S^2 vus comme des courbes dégénérées. Dans cet espace on considère le 1-cycle non trivial de $H_1(\mathscr{C}, S^2, \mathbb{Z})$ donné par

$$t \in [0,1] \longrightarrow \gamma(t) := S^2 \cap \{z = 1 - 2\,t\}.$$

Tout chemin homotope à $\gamma(t)$, pour des déformations maintenant les extrémités dans les « courbes dégénérées » données par les points de S^2, constitue ce que l'on appelle un « *balayage* » de S^2 dans le sens qu'il réalise un générateur de $H_2(S^2)$. La géodésique recherchée sera alors un point critique du lagrangien de longueur L donné par la procédure de *min-max* suivante

$$c = \inf_{\sigma \simeq \gamma} \max_{t \in [0,1]} L(\sigma(t))$$

où $\simeq$ est l'équivalence d'homotopie mentionnée plus haut. La valeur c est appelée la largeur du *min max*. On démontre que l'infimum c est atteint grâce à un argument de comparaison développé par Birkhoff et connu sous le nom de *« déformation polynomiale »* ou *« racourcissement de longueur »* de Birkhoff qui déforme tout élément σ en un élément homotope en réalisant pour tout t des géodésiques par morceaux tout en décroissant le maximum des longueurs (voir [**13**] et [**12**] par exemple).

En 1929 L. Lyusternik et L. Schnirel′man annoncèrent dans une note publiée au *Comptes Rendus de l'Académie des Sciences de Paris*, voir [**30**], un résultat qui démontrait un problème laissé ouvert par H. Poincaré.

Théorème I.2. — *Toute variété riemannienne homéomorphe à la sphère possède au moins trois géodésiques fermées non triviales, distinctes les unes des autres et ne possédant aucun point d'auto-intersection.*

Le résultat est optimal au sens où, sur certains ellipsoïdes, il existe exactement trois géodésiques fermées distinctes sans point d'auto-intersection (voir [**27**]). L'article contenant la preuve de ce résultat, et publié un an plus tard que la note, a ouvert la voie à un domaine entier de l'analyse portant sur les méthodes topologiques pour le calcul des variations. La version anglaise de cet article est paru dans [**31**]. Néanmoins la preuve du théorème précédent n'y était pas complète et les contributions pour établir rigoureusement ce résultat ont été nombreuses et se sont étalées sur plus d'un demi-siècle. Nous renvoyons le lecteur qui désire en savoir plus sur l'histoire riche en rebondissements de la preuve de ce théorème à l'excellent exposé de I. Taimanov ([**45**]).

L'apport principal de l'article de Lyusternik et Schnirel′man a été d'étendre la stratégie de *min-max* de Birkhoff à des cycles de dimensions supérieures à $H_1(\mathscr{C}, S^2)$ et d'introduire des classes d'homotopie non triviales — qu'ils ont nommées catégories — allant de $[0,1]^n$ pour $n = 1,2,3$ dans l'espace $\mathfrak{C}$ des courbes non orientées de Jordan rectifiables (c'est-à-dire des images continues et injectives de S^1 de mesure