363-364

ASTÉRISQUE

2015

SÉMINAIRE BOURBAKI
VOLUME 2013/2014
EXPOSÉ N° 1081

Olivier BENOIST

Construction de courbes sur les surfaces K3

SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE
Publié avec le concours du CENTRE NATIONAL DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

Astérisque est un périodique de la Société Mathématique de France.

Numéro 367-368

Diffusion

Maison de la SMF
Case 916 - Luminy
13288 Marseille Cedex 9
France
smf@smf.univ-mrs.fr

Hindustan Book Agency
O-131, The Shopping Mall
Arjun Marg, DLF Phase 1
Gurgaon 122002, Haryana
Inde

AMS
P.O. Box 6248
Providence RI 02940
USA
www.ams.org

Tarifs

Vente au numéro : 90 € ($ 135)

Abonnement Europe : 650 €, hors Europe : 689 € ($ 1 033)

Des conditions spéciales sont accordées aux membres de la SMF.

Secrétariat : Nathalie Christiaën

Astérisque
Société Mathématique de France
Institut Henri Poincaré, 11, rue Pierre et Marie Curie
75231 Paris Cedex 05, France
Tél : (33) 01 44 27 67 99 • Fax : (33) 01 40 46 90 96
revues@smf.ens.fr • http://smf.emath.fr/

ISSN 0303-1179

ISBN 978-2-85629-804-6

Directeur de la publication : Marc PEIGNÉ

Séminaire BOURBAKI Mars 2014
66e année, 2013-2014, n° 1081, p. 219 à 253

CONSTRUCTION DE COURBES SUR LES SURFACES K3 [d'après Bogomolov-Hassett-Tschinkel, Charles, Li-Liedtke, Madapusi Pera, Maulik...]

par **Olivier BENOIST**

INTRODUCTION

On expose ici des résultats récents de construction de courbes sur les surfaces K3 : la preuve de la conjecture de Tate pour les surfaces K3 en caractéristique finie impaire (théorème 2.1, d'après Maulik [**48**], Charles [**15**] et Madapusi Pera [**46**]), et la construction d'une infinité de courbes rationnelles sur de nombreuses surfaces K3 (théorème 3.1, d'après Bogomolov-Hassett-Tschinkel [**9**] et Li-Liedtke [**42**]).

La première partie de ce texte est consacrée à l'étude de l'application de Kuga-Satake, nécessaire à la preuve de la conjecture de Tate dans la deuxième partie. Finalement, la troisième partie exploite la conjecture de Tate pour construire des courbes rationnelles sur des surfaces K3. Les introductions de chacune de ces parties décrivent plus précisément leur contenu.

Nous rappelons ici des généralités sur les surfaces K3 en caractéristique finie, puis nous présentons les résultats mentionnés ci-dessus.

Définition 0.1. — *Une* surface K3 *sur un corps k est une surface projective*[(1)] *lisse et géométriquement connexe X sur k telle que $K_X \simeq \mathcal{O}_X$ et $H^1(X, \mathcal{O}_X) = 0$.*

Les classes d'isomorphisme de fibrés en droites sur X forment un groupe abélien libre de type fini $\mathrm{Pic}(X)$*. On note $\rho(X)$ son rang : c'est le* nombre de Picard *de X.*

0.1. Surfaces K3 complexes

Si X est une surface K3 complexe, l'injectivité de l'application classe de cycle en cohomologie de Betti $\mathrm{Pic}(X) \to H^2(X, \mathbb{Z})$ montre que $\rho(X) \leq b_2(X) = 22$. La théorie de Hodge implique que l'image de cette application est incluse dans $H^{1,1}(X)$, ce qui fournit l'inégalité plus forte $\rho(X) \leq 20$. Enfin, le théorème des classes $(1,1)$ de

(1) En particulier, quand $k = \mathbb{C}$, on ne considérera pas dans ce texte de surfaces K3 non algébriques.

Lefschetz montre que $\mathrm{Pic}(X) \to H^2(X, \mathbb{Z}) \cap H^{1,1}(X)$ est un isomorphisme, et permet de calculer $\rho(X)$ connaissant la structure de Hodge de X.

Le nombre de Picard peut prendre toutes les valeurs entre 1 et 20, et la théorie des déformations montre que, dans un espace des modules des surfaces K3 polarisées, le lieu où $\rho(X) \geq r$ est une réunion dénombrable de sous-variétés de dimension $20 - r$.

0.2. Surfaces K3 de hauteur finie

Soit maintenant X une surface K3 sur un corps k algébriquement clos de caractéristique finie. Igusa [**31**] a montré que l'inégalité $\rho(X) \leq b_2(X) = 22$ était encore vérifiée. Pour obtenir des obstructions supplémentaires à l'existence de fibrés en droites, analogues à celles obtenues sur $\mathbb{C}$ par théorie de Hodge, Artin et Mazur [**3**] ont introduit un nouvel invariant des surfaces K3. Ils considèrent le foncteur contravariant $T \mapsto \mathrm{Ker}[\mathrm{Br}(X_T) \to \mathrm{Br}(X)]$ défini sur les k-schémas finis locaux. Ils montrent que ce foncteur est représentable par un groupe formel lisse de dimension 1 sur k : le *groupe de Brauer formel* $\widehat{\mathrm{Br}}(X)$. Comme ces groupes formels sont classifiés par leur hauteur [**41**], on obtient un invariant $h(X) \in \mathbb{N}^* \cup \{\infty\}$: c'est la *hauteur* de X. Cet invariant varie semi-continûment supérieurement avec X.

Si X est une surface K3 de hauteur finie, Artin et Mazur [**3**] montrent que $\rho(X) \leq 22 - 2h(X)$. Ces surfaces K3 se comportent comme les surfaces K3 en caractéristique nulle : elles vérifient $\rho(X) \leq 20$ et, si l'on se restreint aux surfaces K3 de hauteur finie, le lieu dans un espace de modules de surfaces K3 polarisées où $\rho(X) \geq r$ est une réunion dénombrable de sous-variétés de dimension $20 - r$.

Une surface K3 de hauteur 1 est dite *ordinaire*, et les surfaces K3 ordinaires forment un ouvert dense des espaces de modules de surfaces K3 polarisées sur k.

0.3. Surfaces K3 supersingulières

Les surfaces K3 de hauteur infinie (i.e., telles que $\widehat{\mathrm{Br}}(X) \simeq \widehat{\mathbb{G}_a}$) sont dites *supersingulières* (ou *Artin-supersingulières*). Leur définition, de nature cohomologique, admet plusieurs formulations équivalentes :

Proposition 0.2. — *Les assertions* (i) *et* (ii) *sont équivalentes, et sont équivalentes à* (iii) *si $k = \overline{\mathbb{F}}_p$ et ℓ est un nombre premier différent de p.*

(i) *X est supersingulière.*
(ii) *Les pentes de $H^2_{\mathrm{cris}}(X/W(k))_{\mathbb{Q}}(1)$ sont toutes égales à* 0.
(iii) *L'endomorphisme de Frobenius de $H^2_{\text{ét}}(X, \mathbb{Q}_\ell(1))$ est d'ordre fini.*

Preuve. — L'équivalence des deux premiers énoncés est due à Artin et Mazur [**3**]. Si X est définie sur un corps fini $\mathbb{F}_q$, Katz et Messing [**34**] montrent que les valeurs propres du Frobenius géométrique agissant en cohomologie ℓ-adique et cristalline coïncident. Ces valeurs propres sont des unités ℓ-adiques par dualité de Poincaré, leurs valuations p-adiques correctement normalisées sont les pentes de $H^2_{\mathrm{cris}}(X/W(k))_{\mathbb{Q}}(1)$, et leurs valeurs absolues complexes sont égales à 1 par les conjectures de Weil prouvées par Deligne [**18**]. L'assertion (ii) est donc équivalente au fait que ce sont des entiers algébriques dont tous les conjugués complexes sont de module 1. Ceci équivaut au fait que ce sont des racines de l'unité, par un lemme de Kronecker, et à l'assertion (iii) car l'action du Frobenius sur $H^2_{\text{ét}}(X, \mathbb{Q}_\ell(1))$ est semi-simple [**21**, Corollaire 1.10]. □

Les propriétés des surfaces K3 supersingulières sont très différentes de celles des surfaces K3 complexes. On ne dispose pas d'obstruction supplémentaire à l'existence de fibrés en droites : Tate [**71**] et Shioda [**69**] ont donné des exemples de telles surfaces avec nombre de Picard 22 (dites *Shioda-supersingulières*). Artin a conjecturé que toutes les surfaces K3 supersingulières étaient Shioda-supersingulières, et on verra ci-dessous (corollaire 0.5 (ii)) que cette conjecture est vraie au moins en caractéristique impaire.

Les surfaces K3 supersingulières constituent un fermé de dimension 9 des espaces de modules de surfaces K3 polarisées sur k [**58**, Theorem 15].

0.4. La conjecture de Tate

La conjecture de Tate, qu'on peut énoncer sur tout corps de type fini[(2)], rend les mêmes services que le théorème des classes $(1,1)$ de Lefschetz, en calculant $\rho(X)$ à l'aide de données cohomologiques :

CONJECTURE 0.3. — *Soit X une surface K3 sur un corps k de type fini. Si ℓ est un nombre premier inversible dans k, et si $\bar{k}$ est une clôture séparable de k, l'application classe de cycle induit un isomorphisme :*

$$\mathrm{Pic}(X) \otimes \mathbb{Q}_\ell \to H^2_{\text{ét}}(X_{\bar{k}}, \mathbb{Q}_\ell(1))^{\mathrm{Gal}(\bar{k}/k)}.$$

Faisant suite aux travaux classiques [**4, 53, 54**], des progrès récents de Maulik [**48**], Charles [**15**] et Madapusi Pera [**46**] ont permis d'obtenir :

THÉORÈME 0.4. — *La conjecture 0.3 est vraie en caractéristique différente de* 2.

On renvoie à l'introduction de la deuxième partie de ce texte pour une discussion des contributions respectives de ces articles.

La conjecture 0.3 est un cas particulier d'une conjecture bien plus générale, due à Tate [**71**], qui prédit l'existence de cycles algébriques en toute codimension sur toute variété projective lisse sur un corps de type fini. On invite le lecteur à consulter l'article de survol [**70**], qui replace notamment la conjecture 0.3 dans ce cadre général.

(2) On dit qu'un corps est de type fini s'il est engendré par un nombre fini d'éléments sur son sous-corps premier.