

363-364

ASTÉRIQUE

2015

SÉMINAIRE BOURBAKI

VOLUME 2013/2014

EXPOSÉ N° 1083

François GOLSE

*De Newton à Boltzmann et Einstein :
Validation des modèles cinétiques et de diffusion*

SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE

Publié avec le concours du CENTRE NATIONAL DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

Comité de rédaction

Ahmed ABBES
Viviane BALADI
Laurent BERGER
Gérard BESSON
Philippe BIANE
Hélène ESNAULT

Damien GABORIAU
Michael HARRIS
Fabrice PLANCHON
Pierre SCHAPIRA
Bertrand TOËN

Éric VASSEROT (dir.)

Diffusion

Maison de la SMF
Case 916 - Luminy
13288 Marseille Cedex 9
France
smf@smf.univ-mrs.fr

Hindustan Book Agency
O-131, The Shopping Mall
Arjun Marg, DLF Phase 1
Gurgaon 122002, Haryana
Inde

AMS
P.O. Box 6248
Providence RI 02940
USA
www.ams.org

Tarifs

Vente au numéro : 90 € (\$ 135)

Abonnement Europe : 650 €, hors Europe : 689 € (\$ 1 033)

Des conditions spéciales sont accordées aux membres de la SMF.

Secrétariat : Nathalie Christiaën

Astérisque

Société Mathématique de France

Institut Henri Poincaré, 11, rue Pierre et Marie Curie

75231 Paris Cedex 05, France

Tél : (33) 01 44 27 67 99 • Fax : (33) 01 40 46 90 96

revues@smf.ens.fr • <http://smf.emath.fr/>

© Société Mathématique de France 2015

Tous droits réservés (article L 122-4 du Code de la propriété intellectuelle). Toute représentation ou reproduction intégrale ou partielle faite sans le consentement de l'éditeur est illicite. Cette représentation ou reproduction par quelque procédé que ce soit constituerait une contrefaçon sanctionnée par les articles L 335-2 et suivants du CPI.

ISSN 0303-1179

ISBN 978-2-85629-804-6

Directeur de la publication : Marc PEIGNÉ

DE NEWTON À BOLTZMANN ET EINSTEIN :
VALIDATION DES MODÈLES CINÉTIQUES ET DE DIFFUSION
[d'après T. Bodineau, I. Gallagher, L. Saint-Raymond, B. Texier]

par François GOLSE

INTRODUCTION

La théorie cinétique des gaz remonte aux travaux de Maxwell [15, 16] et de Boltzmann [6]. Toutefois, ni Maxwell ni Boltzmann n'ont véritablement cherché à établir la théorie cinétique des gaz comme limite des équations de la mécanique classique écrites pour chaque molécule de gaz. C'est pourquoi le statut de la théorie cinétique des gaz est resté assez longtemps ambigu : était-ce une conséquence de la mécanique newtonienne, ou bien, au contraire, une théorie physique distincte qui, tout comme la thermodynamique, ne pouvait se déduire du principe fondamental de la dynamique ? Cette question était d'autant plus troublante que les raisonnements utilisés par Maxwell et Boltzmann pour établir l'équation connue aujourd'hui sous le nom d'*équation de Boltzmann* pouvaient se ramener à des considérations très simples de dynamique (conservation de l'impulsion et de l'énergie cinétique des molécules de gaz avant et après collision) et à des arguments élémentaires de nature statistique. En même temps qu'il écrivait l'équation qui porte son nom, Boltzmann établissait en 1872 le *théorème H* (cf. (44) ci-dessous), une propriété mathématique liée aux symétries de l'équation de Boltzmann, analogue au second principe de la thermodynamique (voir [6], partie I, sections 5, 6 et 8). Qu'un énoncé analogue à la croissance de l'entropie puisse être obtenu à partir des principes fondamentaux de la dynamique semblait contradictoire avec le caractère *réversible* des équations de la mécanique (voir (43) ci-dessous), et surtout avec le théorème de récurrence de Poincaré, paru en 1890. Cette contradiction fut à l'origine d'une controverse scientifique entre Boltzmann, Loschmidt, Poincaré, Zermelo, dont on trouvera une description détaillée dans [12]. Lors du Congrès international des mathématiciens de 1900 à Paris, Hilbert pose le problème de l'« axiomatisation de la physique », et cite l'exemple suivant : « *le Livre de M. Boltzmann sur les Principes de la Mécanique nous incite à établir et à discuter*

au point de vue mathématique d'une manière complète et rigoureuse les méthodes basées sur l'idée de passage à la limite, et qui de la conception atomique nous conduisent aux lois du mouvement des continua ». Près d'un demi-siècle après, Grad [24] réussit à identifier un régime asymptotique dans lequel l'équation de Boltzmann pourrait être démontrée par passage à la limite à partir des équations de Newton de la mécanique classique. Finalement, Lanford proposa un schéma de preuve précis [30] en 1975, établissant la validité de l'équation de Boltzmann sur un intervalle de temps court à partir des équations de la mécanique classique. Malgré tout l'article [30], ainsi que les diverses présentations du théorème de Lanford qui l'ont suivi, laissent de côté la vérification rigoureuse de nombreux points techniques, vérification effectuée pour la première fois dans [20].

Après, il restait, pour compléter le programme esquissé par Hilbert, à obtenir à partir des équations de Newton une équation de la mécanique des milieux continus. Comme on l'a dit plus haut, le théorème de Lanford ne garantit la validité de l'équation de Boltzmann comme conséquence des équations de Newton de la mécanique classique que sur des intervalles de temps courts. On connaît d'autre part les régimes asymptotiques permettant d'établir rigoureusement la plupart des équations de la mécanique des fluides à partir de l'équation de Boltzmann (voir par exemple [42]). Or ces régimes asymptotiques nécessitent de démontrer la validité de la théorie cinétique sur des intervalles de temps considérablement plus longs que ceux obtenus par Lanford. En restreignant leur étude au cas de l'équation de Boltzmann linéaire, Bodineau, Gallagher et Saint-Raymond ont réussi à établir l'équation de Boltzmann linéaire sur des intervalles de temps tendant vers l'infini avec le nombre de particules [4]. Ce résultat remarquable leur permet ensuite d'obtenir l'équation de diffusion (c'est-à-dire l'équation de la chaleur) — et par voie de conséquence le mouvement brownien — comme limite d'une dynamique *déterministe* de particules identiques en interaction.

1. PRÉSENTATION DES MODÈLES

Commençons par donner un aperçu des différents modèles de dynamique particulière dont il sera question dans cet exposé. Dans toute la suite, on supposera que la position des particules considérées varie dans l'espace euclidien \mathbf{R}^3 ou dans un tore plat de dimension 3.

1.1. Modèle n° 1 : les équations de Newton

Ce modèle décrit l'évolution d'un gaz monoatomique de manière exacte au niveau moléculaire. On considère que le gaz est un système de N molécules sphériques de rayon r et de même masse. Supposons dans un premier temps que les molécules ne

sont soumises à aucune force extérieure et n'interagissent qu'au cours de collisions élastiques, et écrivons le principe fondamental de la dynamique⁽¹⁾ pour chaque molécule. Notant $x_k(t) \in \mathbf{R}^3$ et $v_k(t) \in \mathbf{R}^3$ pour $k = 1, \dots, N$ la position et la vitesse de la k -ième particule à l'instant $t \in \mathbf{R}$, on a donc

$$(1) \quad \frac{dx_k}{dt}(t) = v_k(t), \quad \frac{dv_k}{dt}(t) = 0, \quad \text{si } |x_k(t) - x_l(t)| > 2r \text{ pour tout } k \neq l.$$

Au cours d'une collision entre la k -ième et la l -ième molécule à un instant t^* , les positions de ces molécules varient continûment en temps, c'est-à-dire que

$$(2) \quad x_k(t^* + 0) = x_k(t^* - 0), \quad x_l(t^* + 0) = x_l(t^* - 0),$$

tandis que leurs vitesses varient de façon discontinue comme suit :

$$(3) \quad \begin{aligned} v_k(t^* + 0) &= v_k(t^* - 0) - ((v_k(t^* - 0) - v_l(t^* - 0)) \cdot n_{kl}(t^*)) n_{kl}(t^*), \\ v_l(t^* + 0) &= v_l(t^* - 0) + ((v_k(t^* - 0) - v_l(t^* - 0)) \cdot n_{kl}(t^*)) n_{kl}(t^*), \end{aligned}$$

en notant $n_{kl}(t^*) := (x_l(t^* \pm 0) - x_k(t^* \pm 0))/2r$. On notera dans la suite de cet exposé

$$\Omega_N^r := \{(x_1, \dots, x_N) \in (\mathbf{R}^3)^N \text{ t.q. } |x_k - x_l| > 2r \text{ pour tous } k, l = 1, \dots, N, k \neq l\}$$

— il s'agit de l'ensemble des positions physiquement admissibles pour les molécules, qui ne peuvent s'interpénétrer — et $\Gamma_N^r = \Omega_N^r \times (\mathbf{R}^3)^N$. On suppose connues les positions et les vitesses de chaque molécule à l'instant initial $t = 0$, soit

$$(4) \quad x_k(0) = x_k^{\text{in}}, \quad v_k(0) = v_k^{\text{in}}, \quad k = 1, \dots, N$$

avec $(x_1^{\text{in}}, \dots, x_N^{\text{in}}, v_1^{\text{in}}, \dots, v_N^{\text{in}}) \in \Gamma_N^r$, et on étudie le problème de Cauchy (1)-(2)-(3) avec la condition initiale (4). Plus précisément, on cherche les solutions de ce problème de Cauchy $t \mapsto (x_1(t), \dots, x_N(t), v_1(t), \dots, v_N(t))$ à valeurs dans Γ_N^r .

Ce modèle semble être le plus précis que l'on puisse imaginer dans le cadre de la mécanique classique. On peut bien sûr penser que les interactions moléculaires dans un gaz sont plus complexes que des collisions élastiques entre particules sphériques, mais là n'est pas l'essentiel.

En effet, si l'on veut utiliser ce modèle dans le cadre de la dynamique des gaz, il faut pouvoir traiter le cas d'un très grand nombre N de particules. Typiquement, N doit être de l'ordre du nombre d'Avogadro ($6.02 \cdot 10^{23}$) et r est très petit (de l'ordre de $10^{-10}m$), ce qui rend la résolution du système (1)-(2)-(3) impossible en pratique. Et même si l'on pouvait résoudre numériquement ce système avec la précision voulue, il resterait à en donner la condition initiale (4) avec la même précision. Or il est évidemment illusoire d'espérer connaître les positions et les vitesses instantanées de toutes les molécules d'un volume de gaz donné à un instant quelconque.

⁽¹⁾ En pratique r est très petit, de sorte que l'on peut négliger le mouvement de rotation de chaque molécule autour de son centre de gravité.