363-364

ASTÉRISQUE

2015

SÉMINAIRE BOURBAKI
VOLUME 2013/2014
EXPOSÉ N^{o} 1085

Thierry COQUAND

Théorie des types dépendants et axiome d'univalence

SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE
Publié avec le concours du CENTRE NATIONAL DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

Astérisque est un périodique de la Société Mathématique de France.

Numéro 367-368

Diffusion

Maison de la SMF
Case 916 - Luminy
13288 Marseille Cedex 9
France
smf@smf.univ-mrs.fr

Hindustan Book Agency
O-131, The Shopping Mall
Arjun Marg, DLF Phase 1
Gurgaon 122002, Haryana
Inde

AMS
P.O. Box 6248
Providence RI 02940
USA
www.ams.org

Tarifs

Vente au numéro : 90 € ($ 135)

Abonnement Europe : 650 €, hors Europe : 689 € ($ 1 033)

Des conditions spéciales sont accordées aux membres de la SMF.

Secrétariat : Nathalie Christiaën

Astérisque
Société Mathématique de France
Institut Henri Poincaré, 11, rue Pierre et Marie Curie
75231 Paris Cedex 05, France
Tél : (33) 01 44 27 67 99 • Fax : (33) 01 40 46 90 96
revues@smf.ens.fr • http://smf.emath.fr/

ISSN 0303-1179

ISBN 978-2-85629-804-6

Directeur de la publication : Marc PEIGNÉ

Séminaire BOURBAKI Juin 2014
66e année, 2013-2014, n° 1085, p. 367 à 386

THÉORIE DES TYPES DÉPENDANTS ET AXIOME D'UNIVALENCE

par **Thierry COQUAND**

INTRODUCTION

Le but de cet exposé est de présenter l'axiome d'univalence de V. Voevodsky ainsi que son programme pour fonder les mathématiques non sur la théorie des ensembles [**5**], mais sur une théorie des types qui utilise de manière essentielle la notion de types dépendants.

Ce programme repose sur la stratification suivante des objets mathématiques. Le niveau de base est celui des ensembles. On peut considérer à ce niveau les structures algébriques (groupes, anneaux, modules, ...) ou les structures d'ordre par exemple et il est possible de parler de structures initiales, qui sont uniques à isomorphisme près. Le niveau suivant est celui des *groupoïdes*(1). À ce niveau se situe la notion de catégorie qui sera décrite ici comme une *structure* au niveau des groupoïdes (et qui correspond à la notion de structure d'ordre au niveau des ensembles). La notion d'*isomorphisme* est remplacée par la notion d'*équivalence* catégorique. En continuant cette stratification, on arrive à la vision que les objets mathématiques consistent en des n-groupoïdes de niveau arbitraire et des structures sur ces n-groupoïdes. En prenant en compte la correspondance envisagée par Grothendieck entre les ∞-groupoïdes et les types d'homotopies [**15**], on peut reformuler cette description en disant que les mathématiques consistent en *l'analyse de structures sur les types d'homotopie.*

La remarque suivante, due à Voevodsky, est que les objets mathématiques obéissent à des lois uniformes par rapport à cette stratification. De plus, et de manière inattendue, ces lois sont décrites avantageusement par la théorie des *types dépendants*, théorie développée pour la représentation formelle des preuves mathématiques [**8, 13, 14**].

(1) On considère usuellement que le niveau suivant est celui des catégories, comme par exemple dans le papier de Makkai [**24**] qui a influencé les travaux présentés ici. Une des contributions de Voevodsky est de reconnaître que la notion de groupoïde est en fait plus fondamentale que celle de catégorie.

En fait, on verra qu'à partir de lois purement logiques de l'égalité, en particulier la loi 2.1 mise en évidence par Martin-Löf [**25**], tout type a automatiquement une structure d'∞-groupoïde. Cette interprétation permet à son tour de formuler de nouvelles lois logiques pour l'égalité, et en particulier l'*axiome d'univalence*, qui est une vaste généralisation de l'axiome d'extensionalité, et qui suggère une meilleure représentation formelle des concepts mathématiques dans la théorie des types.

Pour introduire la théorie des types dépendants, je commence par une présentation rapide de la logique d'ordre supérieur. Ce système est essentiellement celui utilisé par T.C. Hales pour vérifier formellement sa preuve de la conjecture de Kepler [**16**]. C'est aussi la logique qui correspond à la notion de « topos élémentaire », de Lawvere et Tierney [**9**]. Le calcul mis au point par Voevodsky en est une extension. Deux axiomes de la logique d'ordre supérieur jouent un rôle clef : l'axiome de l'extensionalité pour les propositions (« deux propositions équivalentes sont égales »), dont l'axiome d'univalence est une généralisation directe, et l'axiome de description qui permet de nommer un objet si cet objet est défini de manière unique. Ce dernier axiome devient *prouvable* dans le système de Voeovodsky qui en contient une vaste généralisation.

Un aspect inhabituel de ce papier, de même que pour le texte [**29**] et le livre [**28**], est qu'il consiste essentiellement en un commentaire informel d'un texte formalisé. En fait la plupart des résultats qui sont présentés ici ont d'abord été exprimés directement de manière formelle [**29, 1**].

1. LOGIQUE D'ORDRE SUPÉRIEUR

1.1. Types et termes

Ce système logique, d'une structure simple et naturelle [**10, 16**], servira d'introduction à la théorie des types dépendants. On classifie les termes de cette logique par des *types*, et les *propositions* sont des termes d'un type particulier. On donne ensuite les règles de déduction, qui décrivent quand une proposition est *prouvable*.

Les types de base sont le type des propositions bool et le type des *individus* I. Si A et B sont des types, on peut former le type $A \to B$ des *fonctions* du type A dans le type B. Par exemple, $I \to I$ sera le type des fonctions, alors que $I \to \mathrm{bool}$ sera le type des prédicats sur le type I. Le type des quantificateurs sera $(I \to \mathrm{bool}) \to \mathrm{bool}$.

On notera $u\!:\!A$ pour exprimer le fait que u est un terme de type A. Pour former les termes du calcul d'un type donné, on dispose des opérations suivantes. Si $t : A \to B$ et $u : A$, on peut *appliquer* t à u et obtenir le terme $t(u)$ de type B. Si t est de type $A_1 \to (A_2 \to B)$ on notera $t(u_1, u_2)$ pour $(t(u_1))(u_2)$. Si t est un terme de type B, qui peut faire référence à la variable x de type A, on peut introduire une fonction f de type $A \to B$ et définie par le schéma $f(x) = t$. On a alors $f(u) = (u/x)t$ si u est un terme de type A et $(u/x)t$ dénote l'opération de substitution de la variable x par u dans le terme t.

Les *propositions* sont les termes de type bool, qui sont formés à partir des connecteurs usuels, constantes $\vee, \wedge, \to$(2) de type bool $\to$ (bool $\to$ bool) et $\neg$: bool $\to$ bool, et des quantificateurs $\forall, \exists$, constantes de type $(A \to \text{bool}) \to \text{bool}$. La différence avec le calcul des prédicats ordinaire est que l'on peut quantifier sur des fonctions, fonctionnelles, ... En particulier, si t et u sont deux termes de type A on peut former

$$\mathsf{Eq}_A(t,u) = (\forall P\!:\!A \to \text{bool})(P(t) \to P(u))$$

qui est un terme de type bool (une proposition) exprimant que toute propriété de t est aussi vérifiée pour u. Ceci définit de manière interne la relation d'*égalité*.

Le système comporte finalement des *règles de déduction* qui permettent d'affirmer qu'une proposition est prouvable. La version utilisée par T.C. Hales [**16**] utilise les lois de la logique classique. Ce système a une sémantique naturelle dans la théorie des ensembles en interprétant bool par l'ensemble $\{0,1\}$ et le type des individus I par un ensemble quelconque. Il existe aussi des versions intuitionnistes qui correspondent exactement à la logique des topos élémentaires [**9**] et où bool correspond à l'objet des valeurs de vérités du topos.

1.2. Axiomes d'extensionalité

L'*axiome d'extensionalité* est le premier axiome de la théorie des ensembles [**5**]. Il énonce que deux ensembles sont égaux dès qu'ils ont les mêmes éléments. Dans le système de Church, cet axiome se présente sous deux formes indépendantes. L'axiome d'extensionalité pour les *fonctions* déclare que deux fonctions qui sont égales en tout point sont égales

$$((\forall x\!:\!A)\mathsf{Eq}_B(f(x), g(x))) \to \mathsf{Eq}_{A\to B}(f,g).$$

L'axiome d'extensionalité pour les *propositions* énoncent que deux propositions qui sont équivalentes sont égales

$$((P \to Q) \wedge (Q \to P)) \to \mathsf{Eq}_{\text{bool}}(P,Q).$$

L'axiome d'univalence est une généralisation de ce deuxième énoncé et, ainsi généralisé, il entraîne l'axiome d'extensionalité pour les fonctions.

(2) Nous utilisons le même symbole $\to$ pour l'implication logique et le type des fonctions, et ces deux notions seront identifiées dans la théorie des types dépendants.