363-364 ASTÉRISQUE

2015

SÉMINAIRE BOURBAKI
VOLUME 2013/2014
EXPOSÉ N° 1088

Alain VALETTE

Le problème de Kadison-Singer

SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE
Publié avec le concours du CENTRE NATIONAL DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

Astérisque est un périodique de la Société Mathématique de France.

Numéro 367-368

Diffusion

Maison de la SMF
Case 916 - Luminy
13288 Marseille Cedex 9
France
`smf@smf.univ-mrs.fr`

Hindustan Book Agency
O-131, The Shopping Mall
Arjun Marg, DLF Phase 1
Gurgaon 122002, Haryana
Inde

AMS
P.O. Box 6248
Providence RI 02940
USA
`www.ams.org`

Tarifs

Vente au numéro : 90 € ($ 135)

Abonnement Europe : 650 €, hors Europe : 689 € ($ 1 033)

Des conditions spéciales sont accordées aux membres de la SMF.

Secrétariat : Nathalie Christiaën

Astérisque
Société Mathématique de France
Institut Henri Poincaré, 11, rue Pierre et Marie Curie
75231 Paris Cedex 05, France
Tél : (33) 01 44 27 67 99 • Fax : (33) 01 40 46 90 96
`revues@smf.ens.fr` • `http://smf.emath.fr/`

ISSN 0303-1179

ISBN 978-2-85629-804-6

Directeur de la publication : Marc PEIGNÉ

Séminaire BOURBAKI Juin 2014
66e année, 2013-2014, n° 1088, p. 451 à 476

LE PROBLÈME DE KADISON-SINGER [d'après A. Marcus, D. Spielman et N. Srivastava]

par **Alain VALETTE**

The results that we have obtained leave the question of uniqueness of the singular pure states of $\mathscr{A}_d$ open. We incline to view that such extension is non-unique (...)
(R.V. Kadison and I.M. Singer, [**19**], p. 397)

1. INTRODUCTION

1.1. Énoncé du problème

Si $\mathscr{H}$ est un espace de Hilbert, une C^**-algèbre* sur $\mathscr{H}$ est une $*$-sous-algèbre, fermée pour la norme-opérateur, de l'algèbre $\mathscr{B}(\mathscr{H})$ des opérateurs linéaires bornés sur $\mathscr{H}$. Si A est une C^*-algèbre unitale sur $\mathscr{H}$, un *état* sur A est une fonctionnelle linéaire continue φ sur A, positive (c'est-à-dire $\varphi(x^*x) \geq 0$ pour tout $x \in A$), et normalisée ($\varphi(1) = 1$). L'espace $S(A)$ des états sur A est une partie convexe faible-$*$ compacte du dual de A ; un état est *pur* si c'est un point extrême de $S(A)$.

Exemple 1.1. — Avec $A = \mathscr{B}(\mathscr{H})$: si $\xi \in \mathscr{H}$ est un vecteur de norme 1, l'état $\varphi(T) = \langle T(\xi) \mid \xi \rangle$ est pur ; ces états s'appellent *états vectoriels.*

Exemple 1.2. — Si A est commutative, les états purs sont exactement les caractères de A. En effet, la transformée de Gelfand identifie A à $C(X)$, la C^*-algèbre des fonctions continues sur un espace compact X ; par le théorème de représentation de Riesz, $S(C(X))$ s'identifie à l'espace des mesures de probabilités sur X ; une telle mesure est extrémale si et seulement si c'est une masse ponctuelle, donc l'état correspondant est l'évaluation en un point de X.

Pour A une C^*-algèbre unitale de $\mathscr{B}(\mathscr{H})$, une application du théorème de Hahn-Banach montre que tout état φ de A s'étend en un état de $\mathscr{B}(\mathscr{H})$ (voir [**14**], lemme 2.10.1). L'ensemble des extensions de φ est un convexe K_φ faible-$*$ compact de $\mathscr{B}(\mathscr{H})^*$. Si φ est pur, les points extrêmes de K_φ sont des états purs de $\mathscr{B}(\mathscr{H})$ (en effet, dans ce cas K_φ est une face de $S(\mathcal{B}(\mathcal{H})))$. Par le théorème de Krein-Milman, un état pur sur A s'étend en un unique état pur de $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ si et seulement s'il s'étend en un unique état de $B(H)$.

Exemple 1.3. — $\mathcal{B}(\mathcal{H}))$ admet des états purs qui ne sont pas vectoriels. En effet, considérons $C[0,1]$ comme une C^*-algèbre agissant par multiplication sur $\mathcal{H}= L^2[0,1]$. Un état pur de $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ qui étend un état pur de $C[0,1]$ ne peut être vectoriel, car les fonctions de $C[0,1]$ n'ont pas de vecteur propre commun sur $\mathcal{H}$.

Exemple 1.4. — Il est facile de voir qu'une extension d'un état non pur n'est pas unique en géneral. Prenons par exemple l'algèbre $A \simeq \mathbb{C}^2$ des matrices diagonales dans l'algèbre $M_2(\mathbb{C})$ des matrices 2-fois-2 complexes. Considérons les matrices positives $B_1 = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ 0 & 1/2 \end{pmatrix}$ et $B_2 = \begin{pmatrix} 1/2 & i/2 \\ -i/2 & 1/2 \end{pmatrix}$. Les états $S \mapsto \mathrm{Tr}(SB_1)$ et $S \mapsto \mathrm{Tr}(SB_2)$ de $M_2(\mathbb{C})$ se restreignent tous deux en l'état non pur $(a_1, a_2) \mapsto \frac{a_1+a_2}{2}$ de A.

En 1959, R.V. Kadison et I.M. Singer **[19]** étudient la propriété d'extension unique des états purs sur les C^*-algèbres abéliennes maximales (MASA) de $\mathcal{B}(\mathcal{H})$. Si $\mathcal{H}=L^2[0,1]$ (avec la mesure de Lebesgue) et $A = L^\infty[0,1]$ agissant par multiplication, ils montrent que A n'a pas la propriété d'extension unique des états purs (**[19]**, Theorem 2). Pour $\mathcal{H}=\ell^2(\mathbb{N})$ et l'algèbre $D = \ell^\infty(\mathbb{N})$ des opérateurs diagonaux, ils posent la question :

Problème de Kadison-Singer :
D a-t-elle la propriété d'extension unique des états purs ?

Exemple 1.5. — Pour $k \in \mathbb{N}$, l'état pur φ_k de D, défini par $\varphi_k((a_n)_{n\in\mathbb{N}}) = a_k$, admet comme unique extension à $\mathcal{B}(\ell^2(\mathbb{N}))$ l'état pur $T \mapsto \langle T\mathbf{e}_k|\mathbf{e}_k\rangle$, où $\mathbf{e}_k$ est le k-ième vecteur de la base canonique de $\ell^2(\mathbb{N})$. En effet, soient ψ un état pur de $\mathcal{B}(\ell^2(\mathbb{N}))$ qui étend φ_k, et π_ψ la représentation GNS associée. L'état ψ ne s'annule pas sur l'idéal $\mathcal{K}$ des opérateurs compacts (puisqu'il prend la valeur 1 sur le projecteur de rang 1 associé à $\mathbf{e}_k$). Ainsi la restriction de π_ψ à $\mathcal{K}$ est une représentation irréductible de $\mathcal{K}$, elle est donc équivalente à la représentation standard de $\mathcal{K}$, donc ψ est un état vectoriel ; c'est l'état associé à $\mathbf{e}_k$, comme on le voit facilement[(1)].

(1) Notons que $D \simeq C(\beta\mathbb{N})$, où $\beta\mathbb{N}$ est le compactifié de Stone-Čech de $\mathbb{N}$, c'est-à-dire l'ensemble des ultrafiltres de $\mathbb{N}$. Pour attaquer le problème de Kadison-Singer, il suffirait donc de considérer les états purs de D correspondant aux ultrafiltres libres de $\mathbb{N}$. Cette approche a été considérée (voir par exemple **[2]**), mais n'intervient pas dans la récente solution du problème de Kadison-Singer.

Il y a une façon canonique d'étendre un état de D en un état de $\mathscr{B}(\ell^2(\mathbb{N}))$, grâce à l'espérance conditionnelle $E : \mathscr{B}(\ell^2(\mathbb{N}))\to D : T \mapsto \mathrm{diag}(T)$ (où $\mathrm{diag}(T)$ est la diagonale de T dans la base canonique) : si φ est un état de D, alors $\varphi \circ E$ est un état de $\mathscr{B}(\ell^2(\mathbb{N}))$ qui étend φ (si φ est pur, alors $\varphi \circ E$ est un état pur de $\mathscr{B}(\ell^2(\mathbb{N}))$, voir [**3**], Theorem 1). Le problème de Kadison-Singer se reformule donc ainsi : si φ est un état pur de D, l'état $\varphi \circ E$ est-il la seule extension en un état de $\mathscr{B}(\ell^2(\mathbb{N}))$? Quoiqu'ils aient établi l'unicité de E comme espérance conditionnelle $\mathscr{B}(\ell^2(\mathbb{N}))\to D$ (voir [**19**, Thm.1]), Kadison et Singer tendaient à penser que la réponse devait être négative, comme l'indique la phrase en exergue(2).

1.2. Motivations

Dans [**19**], Kadison et Singer écrivent qu'ils ont appris le problème de I. Kaplansky et I. Segal. Cependant, lors d'exposés plus récents (voir par exemple [**18**]), Kadison a affirmé que le problème trouve sa source dans certains passages du livre de P.A.M. Dirac [**13**] sur les fondements de la mécanique quantique. La question traitée par Dirac est : comment déterminer les probabilités « de base » associées aux états quantiques d'un système ? À la section 18 de [**13**], Dirac suggère de commencer par considérer un ensemble complet d'observables commutant deux à deux(3) ; un tel ensemble forme la partie auto-adjointe d'une MASA. Ensuite, on spécifie les distributions de probabilité associées aux observables de cet ensemble dans un état quantique donné : cela revient à fixer un état φ sur la MASA(4). Enfin, on veut généraliser cette information au système entier, c'est-à-dire étendre cette distribution de probabilité à toutes les autres observables, même non compatibles avec celles de la MASA. Il est naturel de se demander si cette extension est unique, ce qui amène au problème de Kadison-Singer(5).

(2) Le problème d'extension unique des états purs peut se reformuler pour d'autres MASAs dans d'autres algèbres de von Neumann. En particulier, dans un article récent [**25**], Popa montre que le problème de Kadison-Singer est équivalent à la propriété d'extension unique des états purs pour l'ultraproduit des algèbres diagonales dans l'ultraproduit des $M_n(\mathbb{C})$, qui est un facteur de type II_1 ; il montre également, indépendamment des résultats de Marcus-Spielman-Srivastava, que si ω est un ultrafiltre libre sur $\mathbb{N}$ et si A est une MASA singulière dans un facteur M de type II_1, alors l'ultraproduit A^ω a la propriété d'extension unique des états purs dans l'ultraproduit M^ω.
(3) Il s'agit donc d'observables compatibles, telles que la mesure de l'un n'influence pas la mesure de l'autre.
(4) La probabilité que, dans cet état, une observable A prenne des valeurs entre a et b est alors donnée par $\varphi(E_{[a,b]})$), où $E_{[a,b]}$ est le projecteur spectral de A associé à l'intervalle $[a, b]$.
(5) Citons la p. 75 de [**13**] : « *The representation is then completely determined except for the arbitrary phase factors. For most purposes the abritrary phase factors are unimportant and trivial, so that we may count the representation as being completely determined by the observables that are diagonal in it.* » Cela peut laisser penser que Dirac était convaincu de l'unicité de l'extension d'un état. Nous renvoyons à [**26**] pour davantage de détails quant à l'interprétation physique.