380

ASTÉRISQUE

2016

SÉMINAIRE BOURBAKI
VOLUME 2014/2015
EXPOSÉ N° 1097

Denis-Charles CISINSKI

Catégories supérieures et théorie des topos

SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE

Publié avec le concours du CENTRE NATIONAL DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

Astérisque est un périodique de la Société Mathématique de France.

Numéro 380

Comité de rédaction

Ahmed ABBES
Viviane BALADI
Laurent BERGER
Gérard BESSON
Philippe BIANE
Hélène ESNAULT
Damien GABORIAU
Michael HARRIS
Fabrice PLANCHON
Pierre SCHAPIRA
Bertrand TOËN

Éric VASSEROT (dir.)

Diffusion

Maison de la SMF
Case 916 - Luminy
13288 Marseille Cedex 9
France
smf@smf.univ-mrs.fr

Hindustan Book Agency
O-131, The Shopping Mall
Arjun Marg, DLF Phase 1
Gurgaon 122002, Haryana
Inde

AMS
P.O. Box 6248
Providence RI 02940
USA
www.ams.org

Tarifs

Vente au numéro : 75 € ($ 112)

Abonnement Europe : 650 €, hors Europe : 689 € ($ 1 033)

Des conditions spéciales sont accordées aux membres de la SMF.

Secrétariat : Nathalie Christiaën

Astérisque
Société Mathématique de France
Institut Henri Poincaré, 11, rue Pierre et Marie Curie
75231 Paris Cedex 05, France
Tél : (33) 01 44 27 67 99 • Fax : (33) 01 40 46 90 96
revues@smf.ens.fr • http://smf.emath.fr/

© *Société Mathématique de France 2016*

Tous droits réservés (article L 122–4 du Code de la propriété intellectuelle). Toute représentation ou reproduction intégrale ou partielle faite sans le consentement de l'éditeur est illicite. Cette représentation ou reproduction par quelque procédé que ce soit constituerait une contrefaçon sanctionnée par les articles L 335–2 et suivants du CPI.

ISSN 0303-1179

ISBN 978-85629-836-7

Directeur de la publication : Marc PEIGNÉ

Séminaire BOURBAKI Mars 2015
67^{e} année, 2014-2015, n° 1097, p. 263 à 324

CATÉGORIES SUPÉRIEURES ET THÉORIE DES TOPOS

par **Denis-Charles CISINSKI**

INTRODUCTION

La théorie des catégories est profondément liée à la topologie algébrique. D'abord en tant que langage commode pour exprimer les propriétés de l'homologie et de la cohomologie, mais aussi en tant que théorie en soi, c'est-à-dire en tant qu'elle produit et étudie des objets qui lui sont conceptuellement propres. Une notion fondamentale apparaît après l'introduction par Grothendieck et Verdier des catégories dérivées des catégories abéliennes, ainsi que, dans un contexte encore plus général, après l'introduction par Quillen de la notion de catégorie de modèles (fermée) : celle de foncteur dérivé « total » (par exemple le foncteur « sections globales dérivées » $\mathbf{R}\Gamma(X, A)$, par opposition aux groupes de cohomologie $H^n(X, A)$). Pour en saisir toute la saveur, il y a un prix à payer : celui de travailler, comme cela a été observé par Freyd **[21]** pour la théorie de l'homotopie des espaces topologiques, avec des « catégories homotopiques » qui ne sont pas concrètes (dans le sens très précis où il n'existe pas de descriptions de celles-ci comme des catégories d'ensembles munis d'espèces de structures à la Bourbaki) : ces catégories sont obtenues en inversant formellement des classes de morphismes dans des catégories « classiques » (espaces topologiques, (complexes de) groupes abéliens, etc.). Mais le gain est très grand : on peut dériver les foncteurs correspondant aux opérations de la théorie des catégories élémentaire : par exemple, prendre l'ensemble des morphismes, considérer le foncteur limite inductive, ce qui va donner des notions naturelles de cohomologie et d'homologie, respectivement. Il est remarquable que les versions dérivées ont une nette tendance à se comporter de façon similaire à leurs versions non dérivées, ce qui, une fois dégagés les sorites qui justifient et précisent ces analogies, facilite grandement la manipulation de ces constructions. Et surtout, les foncteurs dérivés se comportent encore mieux que leurs versions originales : il arrive qu'ils se mettent à avoir des propriétés d'exactitude plus générales, des comportements plus symétriques, ou bien se mettent à avoir un sens insoupçonné (par exemple, résoudre un problème de modules).

La théorie des ∞-catégories telle qu'elle est développée et pratiquée aujourd'hui, suite aux travaux de Dwyer et Kan, Grothendieck, Verdier, et Quillen, puis de Joyal, Lurie, Rezk, Toën, Vezzosi, et Simpson, consiste à prendre ceci très au sérieux : le langage (au sens de la logique formelle) de la théorie des catégories admet pour sémantique la théorie de l'homotopie abstraite, c'est-à-dire la théorie de la localisation des catégories et des foncteurs dérivés. Outre la précision des analogies évoquées ci-dessus, cela ne fait pas qu'identifier la théorie des catégories et la théorie de l'homotopie de façon inéluctable. L'un des grands promoteurs de la théorie des catégories est Grothendieck, puisqu'il a radicalement refondé toute la géométrie algébrique en se focalisant sur le point de vue fonctoriel. La notion centrale pour incarner le concept d'espace, selon Grothendieck, étant celle de topos, c'est-à-dire de catégorie de faisceaux sur un site (en particulier, des foncteurs). Ce qui a motivé le développement de la théorie des ∞-catégories ces dernières années a été justement ceci : redéployer la totalité de la géométrie algébrique de Grothendieck, mais en l'interprétant via la sémantique du langage catégorique fournie par la théorie de l'homotopie. Cela peut sembler démesuré, mais c'est exactement ce qui a été accompli avec les travaux de Lurie, Toën et Vezzosi. Il en résulte certes des problèmes propres liés à la théorie elle-même, mais il y a aussi beaucoup d'applications aux mathématiques classiques, qu'il est hors de question ne serait-ce que d'esquisser dans une introduction. Citons simplement la première, historiquement, due à Serre : la définition du produit d'intersection des cycles algébriques via la formule des Tor, c'est-à-dire l'idée que, pour obtenir les bonnes multiplicités d'intersection, on ne doit pas considérer le produit tensoriel des algèbres de fonctions $A \otimes_C B$ (qui correspond au produit fibré des variétés algébriques), mais le produit tensoriel dérivé $A \otimes^{\mathbf{L}}_C B$. La géométrie algébrique dérivée permet de donner un sens au spectre de l'algèbre dérivée $A \otimes^{\mathbf{L}}_C B$, lequel s'avère être très exactement le produit fibré de $\mathrm{Spec}(A)$ et de $\mathrm{Spec}(B)$ au-dessus de $\mathrm{Spec}(C)$ dans la ∞-catégorie des schémas dérivés. Autrement dit, la géométrie algébrique dérivée donne une interprétation géométrique à la formule de Serre. Pour mentionner une application spectaculaire en dehors de la géométrie algébrique dérivée, citons l'article de Gaitsgory et Lurie [**25**] sur la conjecture de Weil, sur le nombre de Tamagawa associé à un groupe algébrique affine lisse, à fibres connexes, et de fibre générique semi-simple et simplement connexe, au-dessus d'une courbe (lisse, propre, et géométriquement connexe) définie sur un corps fini.

D'une manière générale, la théorie des topos joue un rôle fondamental en géométrie algébrique. La version dérivée permet, par exemple, de comprendre la théorie de Galois, tant du point de vue classique dégagé par Grothendieck dans [**1**] (cf. [**46**] pour une reformulation en terme de théorie des topos) que du point de vue de la théorie des