

380

ASTÉRIQUE

2016

SÉMINAIRE BOURBAKI  
VOLUME 2014/2015  
EXPOSÉ N° 1102

Sophie MOREL

*Construction de représentations galoisiennes de torsion*

**SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE**

Publié avec le concours du CENTRE NATIONAL DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

*Comité de rédaction*

Ahmed ABBES	Damien GABORIAU
Viviane BALADI	Michael HARRIS
Laurent BERGER	Fabrice PLANCHON
Gérard BESSON	Pierre SCHAPIRA
Philippe BIANE	Bertrand TOËN
Hélène ESNAULT	

Éric VASSEROT (dir.)

*Diffusion*

Maison de la SMF	Hindustan Book Agency	AMS
Case 916 - Luminy	O-131, The Shopping Mall	P.O. Box 6248
13288 Marseille Cedex 9	Arjun Marg, DLF Phase 1	Providence RI 02940
France	Gurgaon 122002, Haryana	USA
smf@smf.univ-mrs.fr	Inde	www.ams.org

*Tarifs*

*Vente au numéro* : 75 € (\$ 112)

*Abonnement* Europe : 650 €, hors Europe : 689 € (\$ 1 033)

Des conditions spéciales sont accordées aux membres de la SMF.

*Secrétariat : Nathalie Christiaën*

Astérisque

Société Mathématique de France

Institut Henri Poincaré, 11, rue Pierre et Marie Curie

75231 Paris Cedex 05, France

Tél : (33) 01 44 27 67 99 • Fax : (33) 01 40 46 90 96

revues@smf.ens.fr • <http://smf.emath.fr/>

© Société Mathématique de France 2016

*Tous droits réservés (article L 122-4 du Code de la propriété intellectuelle). Toute représentation ou reproduction intégrale ou partielle faite sans le consentement de l'éditeur est illicite. Cette représentation ou reproduction par quelque procédé que ce soit constituerait une contrefaçon sanctionnée par les articles L 335-2 et suivants du CPI.*

ISSN 0303-1179

ISBN 978-85629-836-7

Directeur de la publication : Marc PEIGNÉ

---



**CONSTRUCTION DE REPRÉSENTATIONS  
GALOISIENNES DE TORSION  
[d'après Peter Scholze]**

par **Sophie MOREL**

**INTRODUCTION**

Le but de cet exposé est de présenter les résultats de Scholze sur la construction des représentations galoisiennes de torsion associées aux caractères de l'algèbre de Hecke apparaissant dans la cohomologie de torsion des espaces localement symétriques associés au groupe  $\mathbf{GL}_n$ . La phrase précédente est expliquée plus en détail dans la section 1. Toutes les erreurs et inexactitudes dans ce texte sont bien entendu dues à l'auteur et non à Scholze.

Je remercie Ana Caraiani pour d'utiles remarques sur une version précédente de cet exposé.

**1. QUELQUES CONJECTURES DU PROGRAMME  
DE LANGLANDS**

**1.1. Représentations automorphes**

La référence standard pour la définition des formes et représentations automorphes est le texte de Borel et Jacquet dans Corvallis ([8]), voir aussi le livre de Moeglin et Waldspurger ([26]).

Soit  $n$  un entier strictement positif. On note  $\mathbb{A} = \mathbb{R} \times \mathbb{A}_f$  l'anneau des adèles de  $\mathbb{Q}$ , où

$$\mathbb{A}_f = \mathbb{Q} \otimes_{\mathbb{Z}} \widehat{\mathbb{Z}} = \{(x_p) \in \prod_{p \text{ premier}} \mathbb{Q}_p \mid x_p \text{ est dans } \mathbb{Z}_p \text{ pour presque tout } p\}$$

est l'anneau des adèles finies (où « pour presque tout  $p$  » signifie « pour tout  $p$  sauf un nombre fini »). On fixe une mesure de Haar sur le groupe topologique

$$\mathbf{GL}_n(\mathbb{A}) = \{(g_\infty, (g_p)) \in \mathbf{GL}_n(\mathbb{R}) \times \prod_p \mathbf{GL}_n(\mathbb{Q}_p) \mid g_p \in \mathbf{GL}_n(\mathbb{Z}_p) \text{ pour presque tout } p\},$$

et on note  $L^2_{\mathbf{GL}_n} = L^2(\mathbf{GL}_n(\mathbb{Q})\mathbb{A} \backslash \mathbf{GL}_n(\mathbb{A}), \mathbb{C})$ , où  $\mathbf{GL}_n(\mathbb{Q})$  est plongé diagonalement dans  $\mathbf{GL}_n(\mathbb{A})$  et  $\mathbb{A} = \mathbb{R}_{>0}$  est la composante connexe de 1 dans le centre de  $\mathbf{GL}_n(\mathbb{R})$ .<sup>(1)</sup>

Le groupe  $\mathbf{GL}_n(\mathbb{A})$  agit sur  $L^2_{\mathbf{GL}_n}$  par translation à droite sur l'argument de la fonction. Une *représentation automorphe discrète de  $\mathbf{GL}_n(\mathbb{A})$*  est une représentation irréductible de  $\mathbf{GL}_n(\mathbb{A})$  qui apparaît comme facteur direct de la représentation  $L^2_{\mathbf{GL}_n}$ . En fait, on a

$$L^2_{\mathbf{GL}_n} = L^2_{\mathbf{GL}_n, \text{disc}} \oplus L^2_{\mathbf{GL}_n, \text{cont}}$$

en tant que représentation de  $\mathbf{GL}_n(\mathbb{A})$ , où  $L^2_{\mathbf{GL}_n, \text{cont}}$  n'a pas de facteur direct irréductible et

$$L^2_{\mathbf{GL}_n, \text{disc}} = \bigoplus \pi^{m(\pi)}$$

(somme directe complétée), où la somme est sur les représentations automorphes discrètes et les  $m(\pi)$  sont des entiers strictement positifs.

Soit  $f \in L^2_{\mathbf{GL}_n}$  une fonction bornée. On dit que  $f$  est *cuspidale* si, pour tout sous-groupe parabolique propre  $\mathbf{P}$  de  $\mathbf{GL}_n$ , si on note  $\mathbf{N}_P$  le radical unipotent de  $\mathbf{P}$  et  $dn$  une mesure de Haar sur  $\mathbf{N}_P(\mathbb{A})$ , alors, pour tout  $g \in \mathbf{GL}_n(\mathbb{A})$ ,

$$\int_{\mathbf{N}_P(\mathbb{Q}) \backslash \mathbf{N}_P(\mathbb{A})} f(ng)dn = 0.$$

L'espace  $L^2_{\mathbf{GL}_n, \text{cusp}}$  des fonctions bornées cuspidales est un sous-espace de  $L^2_{\mathbf{GL}_n}$  fermé et stable par l'action de  $\mathbf{GL}_n(\mathbb{A})$ , qui est contenu dans  $L^2_{\mathbf{GL}_n, \text{disc}}$ , c'est-à-dire somme directe complétée de représentations irréductibles de  $\mathbf{GL}_n(\mathbb{A})$ . Les représentations irréductibles de  $\mathbf{GL}_n(\mathbb{A})$  qui apparaissent dans  $L^2_{\mathbf{GL}_n, \text{cusp}}$  sont dites *automorphes cuspidales*.

De plus, si  $\pi$  est une représentation automorphe discrète de  $\mathbf{GL}_n(\mathbb{A})$ , on a

$$\pi = \pi_\infty \otimes \bigotimes'_{p \text{ premier}} \pi_p,$$

où  $\pi_\infty$  (resp.  $\pi_p$ ) est une représentation irréductible de  $\mathbf{GL}_n(\mathbb{R})$  (resp.  $\mathbf{GL}_n(\mathbb{Q}_p)$ ) et, pour presque tout  $p$ , la représentation  $\pi_p$  est *non ramifiée*, c'est-à-dire que  $\pi_p^{\mathbf{GL}_n(\mathbb{Z}_p)} \neq 0$  (cet espace est alors de dimension 1). Voir l'article de Flath [16] pour la définition du produit tensoriel restreint  $\bigotimes'$  et pour des références. La classification de Langlands associe à la représentation irréductible admissible  $\pi_\infty$  de  $\mathbf{GL}_n(\mathbb{R})$  une représentation

<sup>(1)</sup> On pourrait fixer un caractère unitaire quelconque  $\xi$  de  $\mathbb{A}$  et considérer l'espace des fonctions  $f : \mathbf{GL}_n(\mathbb{Q}) \backslash \mathbf{GL}_n(\mathbb{A}) \rightarrow \mathbb{C}$  telles que  $f(zg) = \xi(z)f(g)$  pour tous  $z \in \mathbb{A}$  et  $g \in \mathbf{GL}_n(\mathbb{A})$  et qui sont  $L^2$  modulo  $\mathbb{A}$ . Dans cet exposé, on prendra  $\xi = 1$ , mais c'est uniquement pour alléger les notations.