380 ASTÉRISQUE

2016

SÉMINAIRE BOURBAKI
VOLUME 2014/2015
EXPOSÉ N° 1091

David GÉRARD-VARET

Phénomène d'amortissement dans les équations d'Euler

SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE
Publié avec le concours du CENTRE NATIONAL DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

Astérisque est un périodique de la Société Mathématique de France.

Numéro 380

Diffusion

Maison de la SMF
Case 916 - Luminy
13288 Marseille Cedex 9
France
smf@smf.univ-mrs.fr

Hindustan Book Agency
O-131, The Shopping Mall
Arjun Marg, DLF Phase 1
Gurgaon 122002, Haryana
Inde

AMS
P.O. Box 6248
Providence RI 02940
USA
www.ams.org

Tarifs

Vente au numéro : 75 € ($ 112)
Abonnement Europe : 650 €, hors Europe : 689 € ($ 1 033)
Des conditions spéciales sont accordées aux membres de la SMF.

Secrétariat : Nathalie Christiaën

Astérisque
Société Mathématique de France
Institut Henri Poincaré, 11, rue Pierre et Marie Curie
75231 Paris Cedex 05, France
Tél : (33) 01 44 27 67 99 • Fax : (33) 01 40 46 90 96
revues@smf.ens.fr • http://smf.emath.fr/

ISSN 0303-1179

ISBN 978-85629-836-7

Directeur de la publication : Marc PEIGNÉ

Séminaire BOURBAKI Novembre 2014
67[e] année, 2014-2015, n[o] 1091, p. 61 à 81

PHÉNOMÈNE D'AMORTISSEMENT DANS LES ÉQUATIONS D'EULER [d'après J. Bedrossian et N. Masmoudi]

par **David GÉRARD-VARET**

INTRODUCTION

Ces notes ont pour but d'expliquer et de mettre en perspective l'article [**3**], relatif aux équations d'Euler. Introduites par Leonhard Euler en 1755, ces équations modélisent la dynamique d'un fluide dont on néglige la compressibilité et la viscosité. Dans ce modèle, le fluide est associé à un continuum, décrit par une variable d'espace $\mathbf{x}$. Après normalisation de la masse volumique du fluide, elles peuvent s'écrire

$$\partial_t v + v \cdot \nabla v + \nabla p = 0, \quad \nabla \cdot v = 0 \tag{1}$$

avec $v = v(t, \mathbf{x})$ le champ de vitesses du fluide, et $p = p(t, \mathbf{x})$ la pression. Le symbole ∇ fait référence au gradient en $\mathbf{x}$,

$$v \cdot \nabla \; = \; v_1 \partial_1 + \cdots + v_d \partial_d, \quad \nabla \cdot v = \partial_1 v_1 + \cdots + \partial_d v_d$$

où d désigne la dimension de l'espace considéré. La première équation dans (1) correspond à la conservation de la quantité de mouvement, tandis que la seconde traduit l'incompressibilité du fluide. Avec les équations de Navier-Stokes, prenant en compte la viscosité, les équations d'Euler constituent le socle théorique de la mécanique des fluides, et demeurent du point de vue de l'analyse mathématique une source intarissable de problèmes ([**2, 12**]). Nous nous intéresserons ici à sa version bidimensionnelle, qui correspond à des écoulements invariants dans une direction. Négligeant cette direction, on note $v = (v_x, v_y)$, $\mathbf{x} = (x, y) \in \mathcal{O}$, où $\mathcal{O}$ modélise le domaine fluide. Un choix naturel consiste à prendre pour $\mathcal{O}$ un ouvert borné de $\mathbb{R}^2$. D'un point de vue mathématique, il est commode de considérer $\mathcal{O} = \mathbb{R}^2$, avec conditions de périodicité ou de décroissance à l'infini en x, y.

Dans ce contexte bidimensionnel, une quantité clé est le rotationnel du champ de vitesses, appelé *vorticité* : $\Omega = \operatorname{rot} v = \partial_x v_y - \partial_y v_x$. Un calcul montre que cette vorticité satisfait l'équation

$$\partial_t \Omega + v \cdot \nabla \Omega = 0. \tag{2}$$

Pour une solution v régulière de l'équation d'Euler, notant $\phi_{t,s}$ le flot associé à v, on obtient la relation

$$\Omega(t, \mathbf{x}) = \Omega(0, \phi_{0,t}(\mathbf{x}))$$

qui illustre le transport de la vorticité par le flot. On peut déduire de cette relation de nombreuses lois de conservation, dont celle des normes L^p de Ω. Ces contrôles de la vorticité, propres à la dimension 2, sont des outils fondamentaux dans l'analyse du *problème de Cauchy* sur $\mathbb{R}^2$. Ils permettent, pour des classes diverses de données initiales v_0, de construire des solutions v globales en temps. Nous renvoyons par exemple à **[22]** pour des énoncés précis. Citons à titre d'exemple un résultat relatif à l'espace de Sobolev

$$H^s(\mathbb{R}^2) = \{f \in L^2(\mathbb{R}^2), \int_{\mathbb{R}^2} \langle |\xi| \rangle^{2s} |\hat{f}(\xi)|^2 d\xi < \infty\}, \quad \hat{f}(\xi) = \int_{\mathbb{R}^2} e^{-ix\cdot\xi} f(x) dx,$$

où $s \geq 0$, ξ est la variable duale de $\mathbf{x}$, $|\xi|$ est sa norme euclidienne, et $\langle t \rangle = \sqrt{1+t^2}$.

THÉORÈME 0.1. — *Soit $s > 2$, $v_0 \in H^s(\mathbb{R}^2)^2$ tel que $\nabla \cdot v_0 = 0$. Le système* (1) *admet un unique couple solution (v, p) (à constante additive près pour p), satisfaisant*

$$v \in C(\mathbb{R}_+, H^s(\mathbb{R}^2)^2) \cap C^1(\mathbb{R}_+, H^{s-1}(\mathbb{R}^2)^2),\ p \in C^0([0,T]; H^s_{loc}(\mathbb{R}^2)),$$

et la condition initiale $v|_{t=0} = v_0$.

Un résultat analogue est valable en remplaçant les conditions d'intégrabilité à l'infini par des conditions de périodicité, c'est-à-dire en remplaçant $\mathbb{R}$ par $\mathbb{T} = \mathbb{R}/(2\pi\mathbb{Z})$: il suffit de remplacer dans la définition de H^s la transformée de Fourier continue par la transformée de Fourier discrète. On voit ainsi qu'en deux dimensions d'espace, la régularité de la donnée initiale est préservée. Il s'agit d'une question totalement ouverte en trois dimensions.

Au-delà de l'existence globale et de l'unicité des solutions, le problème de leur comportement en temps long est extrêmement ardu, du fait de la nature hamiltonienne des équations d'Euler. Parmi les diverses facettes de ce problème, la stabilité des équilibres (et le comportement asymptotique de leurs perturbations) occupe une place privilégiée et ancienne : leur étude mathématique remonte aux travaux fondateurs de Reynolds **[31]**, Kelvin **[15]** et Rayleigh **[30]** sur les *profils de cisaillement* : $v(x, y) = (V(y), 0)$. On vérifie immédiatement qu'il s'agit de solutions stationnaires de l'équation d'Euler. Se pose alors le problème de leur stabilité, linéarisée et non-linéaire. Nous renvoyons aux monographies **[8]** et **[33]** pour de plus amples développements.