390

ASTÉRISQUE

2017

SÉMINAIRE BOURBAKI
VOLUME 2015/2016
EXPOSÉ N° 1113

Ludovic RIFFORD

Singulières minimisantes en géométrie sous-riemannienne

SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE
Publié avec le concours du CENTRE NATIONAL DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

Astérisque est un périodique de la Société Mathématique de France.

Numéro 390

Diffusion

Maison de la SMF	AMS
Case 916 - Luminy	P.O. Box 6248
13288 Marseille Cedex 9	Providence RI 02940
France	USA
`christian.smf@cirm-math.fr`	`www.ams.org`

Tarifs

Vente au numéro: 65 € ($ 97)
Abonnement électronique : 500 € ($ 750)
Abonnement avec supplément papier : 657 €, hors Europe : 699 € ($ 1049)
Des conditions spéciales sont accordées aux membres de la SMF.

Secrétariat : Nathalie Christiaën

Astérisque
Société Mathématique de France
Institut Henri Poincaré, 11, rue Pierre et Marie Curie
75231 Paris Cedex 05, France
Tél: (33) 01 44 27 67 99 • Fax: (33) 01 40 46 90 96
`astsmf@ihp.fr` • `http://smf.emath.fr/`

ISSN : print 0303-1179, electronic 2492-5926
ISBN 978-2-85629-855-8

Directeur de la publication: Stéphane Seuret

Séminaire BOURBAKI Mars 2016
68e année, 2015-2016, no 1113, p. 277 à 301

SINGULIÈRES MINIMISANTES EN GÉOMÉTRIE SOUS-RIEMANNIENNE [d'après Hakavuori, Le Donne, Leonardi, Monti...]

par **Ludovic RIFFORD**

Soit M une variété lisse (c'est-à-dire de classe C^∞), connexe, sans bord, de dimension $n \geq 3$. Une structure sous-riemannienne (Δ, g) sur M correspond à la donnée d'une distribution lisse de rang constant $m \in [2, n-1]$ totalement non holonome Δ et d'une métrique lisse g sur Δ. Rappelons que si Δ est représentée localement (disons sur un ouvert $\mathcal{V}$) comme le sous-espace vectoriel engendré par une famille de m champs de vecteurs lisses $X^1, \ldots, X^m$ sur $\mathcal{V}$ alors la propriété de totale non-holonomie signifie que

$$T_x M = \operatorname{Lie}\left\{X^1, \ldots, X^m\right\}(x) \qquad \forall x \in \mathcal{V},$$

où $\operatorname{Lie}\left\{X^1, \ldots, X^m\right\}$ désigne la sous-algèbre de Lie engendrée par les champs $X^1, \ldots, X^m$. Cette propriété apparaît parfois sous le nom de condition du rang ou de condition de Hörmander. Étant donnée une structure sous-riemannienne (Δ, g) sur M, on appelle courbe horizontale toute courbe $\gamma : [a,b] \to M$ absolument continue à dérivée dans L^2 telle que

$$\dot\gamma(t) \in \Delta(\gamma(t)) \qquad \text{pour presque tout } t \in [a,b],$$

ce qui permet de définir sa longueur pour la métrique g par

$$\operatorname{long}^g(\gamma) = \int_a^b \|\dot\gamma(t)\|_{\gamma(t)}\, dt.$$

Le théorème de Chow-Rashevski qui constitue le point de départ de la géométrie sous-riemannienne affirme que toute paire de points peut être jointe par une courbe horizontale (rappelons que M est supposée connexe), c'est-à-dire que pour tous x, y dans M il existe une courbe horizontale $\gamma : [0,1] \to M$ telle que $\gamma(0) = x$ et $\gamma(1) = y$. Ce résultat de « connexité horizontale » permet de définir une métrique sur M relativement à (Δ, g) ; on définit $d_{SR} = d^{(\Delta,g)} : M \times M \to [0, +\infty[$ par

$$d_{SR}(x,y) = \inf\left\{\operatorname{long}^g(\gamma) \,|\, \gamma : [0,1] \to M, \text{ hor.}, \gamma(0) = x, \gamma(1) = y\right\}.$$

On obtient ainsi un espace métrique (M, d_{SR}) qui définit en fait la même topologie que M, on parle d'espace de Carnot-Carathéodory.

La géométrie sous-riemannienne, c'est-à-dire l'étude des espaces de Carnot-Carathéodory, est en lien avec de nombreux domaines des mathématiques. Nous renvoyons par exemple le lecteur au texte [**19**] du séminaire Bourbaki donné par Ivan Kupka en juin 1996 pour des présentations claires et détaillées de différents problèmes sous-riemanniens en théorie des équations aux dérivées partielles, en théorie géométrique de la mesure, ou en théorie des probabilités. L'objectif de ce texte, qui n'a pas la prétention de faire suite à celui de Kupka au spectre très large, est de faire le point sur quelques questions ouvertes majeures de la géométrie sous-riemannienne en lien direct avec la présence possible de singulières minimisantes. Après avoir décrit brièvement ce phénomène typiquement sous-riemannien dans la section suivante, nous nous attacherons donc à présenter quelques-uns des résultats phares obtenus ces vingt dernières années sur ces questions, avec une attention particulière pour une série de travaux sur la régularité des singulières minimisantes dus à Leonardi-Monti [**21**] et Hakavuori-Le Donne [**16**].

Avant d'entrer dans le vif du sujet, je tiens à remercier chaleureusement Frédéric Jean, Enrico Le Donne et tout spécialement Roberto Monti et ses précieuses notes scannées pour les nombreux échanges qu'on a pu avoir pendant la préparation de ce texte. Je remercie également Aris Daniilidis et Alex Ioffe pour les discussions qu'on a eues en rapport avec les implications possibles du théorème 2.10.

1. GÉODÉSIQUES MINIMISANTES

Nous renvoyons le lecteur aux ouvrages de Montgomery [**25**], Agrachev-Barilari-Boscain [**3**] et de l'auteur [**32**] pour plus de détails sur le matériel présenté dans cette section.

Fixons une structure sous-riemannienne (Δ, g) sur M, supposons l'espace métrique (M, d_{SR}) complet et fixons deux points distincts x et y dans M. Par une version sous-riemannienne du théorème de Hopf-Rinow, l'hypothèse de complétude garantit l'existence de courbes réalisant l'infimum dans la définition de d_{SR} (dorénavant toutes les structures sous-riemaniennes considérées seront implicitement supposées complètes). Considérons donc une courbe horizontale $\bar{\gamma} : [0,1] \to M$ joignant x à y telle que

$$d^g(x,y) = \operatorname{long}^g(\bar{\gamma}).$$

Comme dans le cas riemannien, pour trouver des conditions d'optimalité il est plus intéressant de travailler avec des courbes minimisantes ayant une vitesse constante et donc avec des courbes horizontales minimisant l'énergie sous-riemannienne

$$e_{SR}(x,y) = \inf \left\{ \operatorname{energy}^g(\gamma) \,|\, \gamma : [0,1] \to M, \text{ hor.}, \gamma(0) = x, \gamma(1) = y \right\},$$