390

ASTÉRISQUE

2017

SÉMINAIRE BOURBAKI
VOLUME 2015/2016
EXPOSÉ Nº 1116

Nalini ANANTHARAMAN

Topologie des hypersurfaces nodales de fonctions aléatoires gaussiennes

SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE
Publié avec le concours du CENTRE NATIONAL DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

Astérisque est un périodique de la Société Mathématique de France.

Numéro 390

Diffusion

Maison de la SMF
Case 916 - Luminy
13288 Marseille Cedex 9
France
christian.smf@cirm-math.fr

AMS
P.O. Box 6248
Providence RI 02940
USA
www.ams.org

Tarifs

Vente au numéro: 65 € ($ 97)
Abonnement électronique : 500 € ($ 750)
Abonnement avec supplément papier : 657 €, hors Europe : 699 € ($ 1049)
Des conditions spéciales sont accordées aux membres de la SMF.

Secrétariat : Nathalie Christiaën

Astérisque
Société Mathématique de France
Institut Henri Poincaré, 11, rue Pierre et Marie Curie
75231 Paris Cedex 05, France
Tél: (33) 01 44 27 67 99 • Fax: (33) 01 40 46 90 96
astsmf@ihp.fr • http://smf.emath.fr/

ISSN : print 0303-1179, electronic 2492-5926
ISBN 978-2-85629-855-8

Directeur de la publication: Stéphane Seuret

Séminaire BOURBAKI Juin 2016
68e année, 2015-2016, no 1116, p. 369 à 408

TOPOLOGIE DES HYPERSURFACES NODALES DE FONCTIONS ALÉATOIRES GAUSSIENNES [d'après Nazarov et Sodin, Gayet et Welschinger]

par **Nalini ANANTHARAMAN**

INTRODUCTION

Depuis l'expérience de Chladni à la fin du XVIIIe siècle, les lignes nodales des fonctions propres du laplacien fascinent : la manière dont leur forme varie en fonction de la fréquence est une énigme pour les mathématiciens. Une quantité aussi élémentaire que le *nombre de composantes connexes* des ensembles nodaux reste difficile d'accès, et constitue le sujet de cet exposé. Plaçons-nous par exemple sur une variété riemannienne compacte connexe M. Ordonnons les valeurs propres du laplacien, répétées avec multiplicité, en une suite $\lambda_0 = 0 < \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \cdots \leq \lambda_n \leq \cdots$ qui tend vers l'infini, et notons $(\psi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une base orthonormée de $L^2(M,\mathbb{R})$ formée de fonctions propres associées. On notera Z_{ψ_n} le lieu d'annulation de ψ_n, appelé aussi ensemble nodal de ψ_n ; les domaines nodaux sont les composantes connexes de $M \setminus Z_{\psi_n}$. Courant a démontré dans les années 1920 que le nombre de domaines nodaux de ψ_n est inférieur ou égal à n. Mais on sait dès l'article de Pleijel [**61**] que cette borne ne peut être atteinte que pour un nombre fini de n : le lecteur intéressé pourra consulter l'article d'exposition [**10**] qui contient, entre autres, la description des cas d'égalité pour certaines géométries simples. En fait il n'est même pas vrai que le nombre de domaines nodaux doive tendre vers l'infini avec n [**75, 48, 3, 4**]. On renvoie aux articles [**36, 37, 86**] pour des résultats récents permettant, sous des hypothèses très particulières, d'affirmer l'existence d'une sous-suite (n_k) telle que le nombre de domaines nodaux de (ψ_{n_k}) tende vers l'infini.

Un autre domaine où l'étude du lieu des zéros occupe une place centrale est évidemment la géométrie algébrique. Les variétés projectives sont définies comme lieu des zéros de polynômes homogènes. Dans le cas des points complexes, la topologie du lieu des zéros offre peu de mystères, du moins en codimension 1 : les hypersurfaces non singulières de degré donné d de $\mathbb{CP}^N$ sont toutes isotopes, donc difféomorphes entre elles. Leurs nombres de Betti sont les mêmes que ceux de $\mathbb{CP}^N$, sauf le $(N-1)$-ième qui est un polynôme explicite en le degré d, de la forme $d^N + O(d^{N-1})$. Les preuves de ces faits bien connus depuis le célèbre travail fondateur de Lefschetz sont reproduites, par exemple, dans **[45]** §4, **[60, 59]**, et les lemmes 2 et 3 de **[27]**. Dans le cas simple de $N = 1$, l'« hypersurface » n'est autre que l'ensemble des racines d'un polynôme de degré d à une variable, et, donc, possède génériquement d éléments. Dans le domaine réel, la situation est plus compliquée : le nombre de racines *réelles* d'un polynôme de degré d à coefficients *réels* peut varier entre 0 et d, en ayant la même parité que d. La question reste énigmatique déjà à partir de $N = 2$, si on la pose comme dans la première partie du 16-ème problème de Hilbert, c'est-à-dire comme l'étude de l'arrangement dans $\mathbb{RP}^N$ de l'ensemble des points réels d'une hypersurface réelle non singulière en fonction de son degré. Si on se restreint au problème du nombre de composantes connexes, la situation ne s'améliore que peu : la borne optimale n'est connue que pour $d \leq 3$ avec N quelconque, $N \leq 2$ pour tout d (Harnack obtient alors la borne optimale de $\frac{1}{2}(d-1)(d-2)+1$ composantes connexes **[32, 42]**), $N = 3$ et $d = 4$ **[40]**. Les articles **[41, 57]** tentent de s'approcher de la borne supérieure de 25 composantes connexes obtenues par Petrovskiĭ et Oleĭnik **[60, 58]** pour $N = 3, d = 5$. En général, grâce d'un côté à la théorie de Smith **[73]** et la théorie de Morse **[80, 51]**, et de l'autre côté à la méthode de patchwork de Viro **[83, 5]**, on sait que pour N fixé le nombre maximal de composantes connexes grandit en fonction de d comme $a_N d^N$.

Une autre manière d'envisager ces questions est de considérer des polynômes ou des fonctions propres aléatoires, et de s'interroger d'un point de vue statistique sur les propriétés du lieu de leurs zéros. Plus généralement, on peut formuler la question suivante :

Soit $\mathscr{H}$ un espace de fonctions sur une variété riemannienne M, muni d'une mesure de probabilité. Que peut-on dire statistiquement sur les propriétés topologiques du lieu des zéros d'une fonction de $\mathscr{H}$?

La réponse dépend bien sûr de la mesure de probabilité choisie, et n'a de sens que si cette mesure paraît quelque peu naturelle.

Le théorème 3.6 de ce texte, tiré de l'article **[54]**, concerne comme cas particuliers la plupart des exemples de cette introduction. Il traite le problème dans un cadre asymptotique, sous des hypothèses très précises que nous énoncerons en temps voulu : soit $(\mathscr{H}_L)$ une famille de sous-espaces vectoriels de dimension finie de $C^0(M)$, indexée par un paramètre L qui tend vers l'infini. On suppose que $\dim \mathscr{H}_L \underset{L\longrightarrow\infty}{\longrightarrow} +\infty$. Chaque espace $\mathscr{H}_L$ est muni d'une mesure de probabilité. Quelles sont les propriétés statistiques du lieu des zéros Z_f d'une fonction $f \in \mathscr{H}_L$ dans la limite $L \longrightarrow +\infty$? Que peut-on dire, par exemple, sur la loi du nombre de composantes connexes de Z_f ?