390

ASTÉRISQUE

2017

SÉMINAIRE BOURBAKI
VOLUME 2015/2016
EXPOSÉ N° 1118

Evelyne MIOT

Le flot binormal, l'équation de Schrödinger et les tourbillons filamentaires

SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE

Publié avec le concours du CENTRE NATIONAL DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

Astérisque est un périodique de la Société Mathématique de France.

Numéro 390

Comité de rédaction

Ahmed ABBES
Viviane BALADI
Laurent BERGER
Philippe BIANE
Hélène ESNAULT
Philippe EYSSIDIEUX
Damien GABORIAU
Michael HARRIS
Fabrice PLANCHON
Pierre SCHAPIRA

Éric VASSEROT (dir.)

Diffusion

Maison de la SMF
Case 916 - Luminy
13288 Marseille Cedex 9
France
christian.smf@cirm-math.fr

AMS
P.O. Box 6248
Providence RI 02940
USA
www.ams.org

Tarifs

Vente au numéro: 65 € ($ 97)

Abonnement électronique : 500 € ($ 750)

Abonnement avec supplément papier : 657 €, hors Europe : 699 € ($ 1049)

Des conditions spéciales sont accordées aux membres de la SMF.

Secrétariat : Nathalie Christiaën

Astérisque
Société Mathématique de France
Institut Henri Poincaré, 11, rue Pierre et Marie Curie
75231 Paris Cedex 05, France
Tél: (33) 01 44 27 67 99 • Fax: (33) 01 40 46 90 96
astsmf@ihp.fr • http://smf.emath.fr/

© *Société Mathématique de France 2017*

Tous droits réservés (article L 122–4 du Code de la propriété intellectuelle). Toute représentation ou reproduction intégrale ou partielle faite sans le consentement de l'éditeur est illicite. Cette représentation ou reproduction par quelque procédé que ce soit constituerait une contrefaçon sanctionnée par les articles L 335–2 et suivants du CPI.

ISSN : print 0303-1179, electronic 2492-5926
ISBN 978-2-85629-855-8

Directeur de la publication: Stéphane Seuret

Séminaire BOURBAKI Juin 2016
68e année, 2015-2016, no 1118, p. 427 à 451

LE FLOT BINORMAL, L'ÉQUATION DE SCHRÖDINGER ET LES TOURBILLONS FILAMENTAIRES [d'après Valeria Banica et Luis Vega]

par **Evelyne MIOT**

INTRODUCTION

Le but de cet exposé est de présenter les travaux de V. Banica et L. Vega [**2, 3, 4, 6, 5, 7**] à propos de l'équation du flot par courbure binormale. Cette équation, issue de la mécanique des fluides, décrit l'évolution des tourbillons filamentaires — écoulements de fluides pour lesquels le tourbillon se concentre le long d'une courbe de l'espace. Il existe une famille remarquable de solutions auto-similaires de ce flot, qui développent une singularité ponctuelle à temps égal à zéro. Ce sont les questions *d'existence et de stabilité* de cette dynamique singulière qui constituent le cœur des résultats expliqués ici. L'approche repose sur le lien subtil qui unit le flot binormal et l'équation de Schrödinger.

1. LE FLOT PAR COURBURE BINORMALE

1.1. Une brève présentation

L'objet d'étude de cet exposé est l'équation du flot par courbure binormale [(1)]

$$\partial_t \chi = \partial_x \chi \wedge \partial_{xx} \chi. \tag{B}$$

Ici, $\chi : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$, $(t,x) \mapsto \chi(t,x)$ désigne une courbe paramétrée par la longueur d'arc $x \in \mathbb{R}$ au temps $t \in \mathbb{R}_+$. L'équation (B) est un modèle asymptotique régissant l'évolution des tourbillons filamentaires — écoulements de fluides où le tourbillon se concentre pour tout temps $t \in \mathbb{R}_+$ le long d'une courbe de l'espace. Il a été obtenu de façon formelle, à partir des équations de la mécanique des fluides, par Da Rios [**13**],

[(1)] Dans toute cette note, ∂_y désigne la dérivée partielle $\partial/\partial y$ par rapport à y et ∂_{yy} la dérivée partielle d'ordre deux $\partial^2/\partial y^2$.

puis redécouvert par Arms et Hama [1]. On mentionne également l'article récent de Jerrard et Seis [21] pour une dérivation rigoureuse sous des hypothèses plus faibles de concentration du tourbillon. Bien que certaines des caractéristiques physiques des filaments ne soient pas retrouvées au travers de ce modèle, l'équation (B) présente des propriétés mathématiques riches et permet de prédire certaines dynamiques singulières, notamment celles des solutions auto-similaires.

En notant $c(t,\cdot)$ la courbure, $\tau(t,\cdot)$ la torsion, et $(T(t,\cdot), n(t,\cdot), b(t,\cdot))$ le repère de Serret-Frenet associés à la courbe $\chi(t,\cdot)$ (2), de sorte que $T(t,\cdot) = \partial_x \chi(t,\cdot) : \mathbb{R} \to \mathbb{S}^2$, on remarque que $\partial_x \chi \wedge \partial_{xx} \chi = T \wedge \partial_x T = cT \wedge n$. Ainsi, le flot binormal admet une forme plus condensée qui explique sa dénomination :

$$\partial_t \chi = cb.$$

Par ailleurs, en dérivant chacun des termes de (B) par rapport à x, on obtient une équation pour le vecteur tangent uniquement, appelée équation pour les applications de Schrödinger (3)

$$\partial_t T = T \wedge \partial_{xx} T. \tag{1}$$

1.2. Quelques résultats d'existence de solutions

Le flot binormal admet plusieurs solutions explicites et simples :

– *les droites de* $\mathbb{R}^3$ (qui forment des solutions stationnaires) ;

– *les courbes qui forment des cercles se propageant en translation uniforme* dans la direction perpendiculaire à celle du cercle, à vitesse égale à l'inverse du rayon du cercle ;

– *les courbes qui forment des hélices.*

Il s'agit de solutions régulières ; au-delà de ces exemples, il existe aussi une théorie pour des solutions non nécessairement deux fois dérivables. Par exemple, il est possible de reformuler (B) au sens des distributions pour des courbes appartenant à $L^\infty(H^{3/2})$. De plus, d'après le paragraphe précédent, les problèmes de Cauchy pour les équations (B) et pour (1) peuvent se traiter de façon parallèle. Par combinaison des articles de Ding et Wang [14] et Chang, Shatah et Uhlenbeck [12] ou d'après Nahmod, Shatah, Vega et Zeng [32], il s'ensuit que (B) est globalement bien posée dans $L^\infty(H^3)$. Plus récemment, Jerrard et Smets [22] (voir aussi [35]) ont par ailleurs établi des résultats de stabilité pour (B) et (1) dans des espaces de régularité plus faible.

L'évolution de courbes trop singulières pour entrer dans le cadre précédent a été considérée par différents auteurs. Jerrard et Smets [23] ont introduit une formulation

(2) Voir (4) ci-après pour un rappel de la définition précise.
(3) Schrödinger map equation, dans la terminologie anglo-saxonne.