390

ASTÉRISQUE

2017

SÉMINAIRE BOURBAKI
VOLUME 2015/2016
EXPOSÉ N° 1107

Frédéric NAUD

Bornes de Weyl fractales et résonances

SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE
Publié avec le concours du CENTRE NATIONAL DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

Astérisque est un périodique de la Société Mathématique de France.

Numéro 390

Diffusion

Maison de la SMF	AMS
Case 916 - Luminy	P.O. Box 6248
13288 Marseille Cedex 9	Providence RI 02940
France	USA
christian.smf@cirm-math.fr	www.ams.org

Tarifs

Vente au numéro: 65 € ($ 97)

Abonnement électronique : 500 € ($ 750)

Abonnement avec supplément papier : 657 €, hors Europe : 699 € ($ 1049)

Des conditions spéciales sont accordées aux membres de la SMF.

Secrétariat : Nathalie Christiaën

Astérisque

Société Mathématique de France

Institut Henri Poincaré, 11, rue Pierre et Marie Curie

75231 Paris Cedex 05, France

Tél: (33) 01 44 27 67 99 • Fax: (33) 01 40 46 90 96

astsmf@ihp.fr • http://smf.emath.fr/

ISSN : print 0303-1179, electronic 2492-5926

ISBN 978-2-85629-855-8

Directeur de la publication: Stéphane Seuret

Séminaire BOURBAKI Novembre 2015
68e année, 2015-2016, n° 1107, p. 77 à 100

BORNES DE WEYL FRACTALES ET RÉSONANCES
[d'après Nonnenmacher-Sjöstrand-Zworski [39, 38]]

par **Frédéric NAUD**

1. INTRODUCTION

Ces notes concernent un exposé Bourbaki sur un travail récent de Nonnenmacher-Sjöstrand-Zworski [**39**] sur les bornes de Weyl fractales pour des systèmes ouverts chaotiques. Cet article fait suite à un papier précédent [**38**] où la méthode de réduction à des applications quantifiées fait son apparition. D'un point de vue historique, l'article [**39**] marque en quelque sorte le point final à une longue série de travaux [**44, 53, 20, 47**] concernant les bornes de Weyl « fractales ». Cela ne signifie pas que l'histoire s'arrête là, et des développements très récents concernant l'optimalité de ces bornes et les questions de trous spectraux montrent que le sujet est plus actif que jamais, on renvoie par exemple au survey [**37**] pour un état de l'art. La théorie des résonances n'est pas qu'un pur objet de physique mathématique : l'étude de groupes arithmétiques non cofinis (par exemple des sous-groupes d'indice infini de $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$) conduit naturellement à des problèmes de résonances et de trous spectraux uniformes, voir par exemple [**7**].

Pour comprendre la problématique, il faut déjà se rappeler ce qu'est la loi de Weyl pour le spectre du laplacien sur un domaine compact à bord. Ce théorème datant de 1911 donne un asymptotique du nombre de valeurs propres du laplacien (avec condition au bord), quand la fréquence tend vers l'infini. C'est un des résultats les plus importants de l'analyse sur les variétés riemanniennes et de la physique mathématique. Il a motivé de nombreux développements et a conduit à la théorie moderne des équations aux dérivées partielles et surtout à l'analyse micro-locale, avec sa version semi-classique, telle que nous la connaissons aujourd'hui.

Les bornes de Weyl fractales concernent non pas un spectre de valeurs propres réelles mais un sous-ensemble discret du plan complexe appelé « spectre de résonances », correspondant au spectre d'opérateurs non auto-adjoints, dans le cas où l'espace est non-compact. Si on compte les résonances dans certaines bandes du plan complexe, on peut établir, pour un régime à haute fréquence, des majorations faisant intervenir un exposant fractionnaire lié à une dimension fractale d'un ensemble de trajectoires captées du flot hamiltonien associé.

Le plan de ces notes se déroule en deux volets : une première série de sections expositoires (§2 ... §7) proposant un survol du sujet et énonçant résultats (et conjectures), suivies d'une section plus technique où on tente de survoler quelques aspects des méthodes de preuve.

Remerciements. — Merci à Laurent Guillopé pour sa lecture et ses remarques pertinentes. Il faut saluer le travail éditorial de Viviane Le Dret, qui non seulement réalise la mise en page mais corrige aussi des coquilles.

2. LOI DE WEYL POUR LES VALEURS PROPRES

En 1911, Hermann Weyl **[51]** prouve le résultat suivant. Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ un ouvert borné, dont le bord est noté $\partial\Omega$. On note (en répétant avec multiplicité)

$$0 < \lambda_1^2 \leq \lambda_2^2 \leq \cdots \leq \lambda_k^2 < +\infty$$

la suite des valeurs propres du *laplacien Dirichlet* sur Ω, c'est-à-dire correspondant aux solutions non triviales du problème

$$\begin{cases} -\Delta f = \lambda^2 f \\ f|_{\partial\Omega} = 0, \end{cases}$$

où $\Delta f = \sum_k \partial_k^2 f$ est le laplacien usuel sur $\mathbb{R}^d$. Notons $\mathscr{N}(r)$ la fonction de comptage

$$\mathscr{N}(r) := \#\{k \in \mathbb{N} \ : \ \lambda_k \leq r\}\,;$$

alors, lorsque $r \to +\infty$, on a la formule asymptotique

$$\mathscr{N}(r) = \omega_d \frac{\mathrm{Vol}(\Omega)}{(2\pi)^d} r^d + o(r^d),$$

où ω_d désigne le volume de la boule unité euclidienne dans $\mathbb{R}^d$, et $\mathrm{Vol}(\Omega)$ le volume du domaine. Cette loi de croissance asymptotique du spectre est connue sous le nom de « loi de Weyl ». C'est un des théorèmes emblématiques de l'analyse du siècle dernier. Cet asymptotique a connu depuis de nombreux généralisations et raffinements, en particulier par Hörmander **[25]**, voir par exemple **[17]** pour la méthode de Hörmander. Contentons-nous de citer un de ses avatars semi-classique, pour le cas simple d'un opérateur de Schrödinger avec « puits de potentiel ». Soit $V : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ un potentiel C^∞, satisfaisant les conditions de croissance

$$V(x) \geq C\langle x\rangle^k, \text{ pour tout } |x| \geq R$$
$$\text{et } |\partial^\alpha V(x)| \leq C_\alpha \langle x\rangle^k, \text{ pour tout } |x| \geq R$$