332

ASTÉRISQUE

2010

SÉMINAIRE BOURBAKI
VOLUME 2008/2009
EXPOSÉS 997-1011

(1000) *Le groupe de Cremona et ses sous-groupes finis*

Jean-Pierre SERRE

SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE
Publié avec le concours du CENTRE NATIONAL DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

Séminaire BOURBAKI Novembre 2008
61e année, 2008-2009, nº 1000, p. 75 à 100

LE GROUPE DE CREMONA ET SES SOUS-GROUPES FINIS

par **Jean-Pierre SERRE**

Qu'est-ce que le *groupe de Cremona*? Pour un géomètre, c'est le groupe des transformations birationnelles du plan (affine ou projectif, peu importe) dans lui-même. Pour un algébriste, c'est le groupe des k-automorphismes du corps $k(t_1, t_2)$ où t_1, t_2 sont des indéterminées, et k est un corps (le plus souvent $\mathbf{C}$). Ces groupes ont été beaucoup étudiés dans les 150 dernières années. Le présent exposé se bornera à en décrire les *sous-groupes finis*, dans un cadre un peu plus large que celui où $k = \mathbf{C}$; nous nous intéresserons par exemple au cas où le corps k est égal à $\mathbf{Q}$ ou à un corps fini, cf. §§ 2-5. Le § 1 contient quelques définitions préliminaires, ainsi qu'un « théorème de fusion » pour le tore standard du groupe de Cremona.

1. TORE STANDARD ET FUSION

1.1. Définitions et exemples

Soit k un corps et soit n un entier ≥ 1. On note $\mathrm{Cr}_n(k)$ le groupe des k-automorphismes de $k(t_1, \ldots, t_n)$ où les t_i sont des indéterminées indépendantes ; c'est le groupe de Cremona de rang n (ou plutôt le groupe de ses k-points, cf. [De 70, § 1]).

On a par exemple $\mathrm{Cr}_1(k) = \mathbf{PGL}_2(k)$. Par la suite, on s'intéressera surtout(1) au cas $n = 2$ et l'on écrira alors Cr à la place de Cr_2.

Soit X une k-variété géométriquement irréductible réduite dont le corps des fonctions $k(X)$ soit isomorphe à $k(t_1, \ldots, t_n)$ (autrement dit une variété k-rationnelle). Choisissons un isomorphisme entre $k(X)$ et $k(t_1, \ldots, t_n)$. Tout élément de $\mathrm{Cr}_n(k)$ peut alors être identifié à un automorphisme birationnel $X \dashrightarrow X$, autrement dit à un « pseudoautomorphisme » de X au sens de [De 70, § 1.2]. Suivant ce que l'on veut

(1) On trouvera dans [Se 09, § 6] quelques conjectures (ou « questions ») sur le cas $n \geqslant 3$, mais je ne suis pas sûr qu'elles soient raisonnables.

faire, on prendra pour X l'espace affine $\mathbf{Aff}^n$, l'espace projectif $\mathbf{P}_n$ ou le tore standard $T = (\mathbf{G}_m)^n$, cf. § 1.2 ci-dessous.

Exemples de sous-groupes de $\mathrm{Cr}_n(k)$ pour $n = 2$

a) Prenons $X = \mathbf{P}_2$. On a $\mathrm{Aut}_k(X) = \mathbf{PGL}_3(k)$; comme un automorphisme birégulier est *a fortiori* birationnel, on obtient un plongement de $\mathbf{PGL}_3(k)$ dans $\mathrm{Cr}(k)$. (Du point de vue de [De 70], où l'on regarde Cr comme un foncteur en groupes, on a un plongement de $\mathbf{PGL}_3$ dans Cr ; on n'a pas besoin de mentionner k.)

b) Prenons $X = \mathbf{P}_1 \times \mathbf{P}_1$; on obtient ainsi un plongement de $\mathbf{PGL}_2 \times \mathbf{PGL}_2$ dans Cr.

c) (de Jonquières) Soit $a \in \mathbf{PGL}_2(k)$, et soit $b_t \in \mathbf{PGL}_2(k(t))$. Le couple (a, b_t) définit un élément g_{a,b_t} de $\mathrm{Cr}(k)$ par

$$(t_1,\ t_2) \quad \mapsto \quad (a(t_1),\ b_{t_1}(t_2)).$$

[*Exemple* : $(t_1,\ t_2) \ \mapsto (1/t_1,\ (t_1^3 + t_2)/(t_1 t_2 + 1))$.]

Les g_{a,b_t} forment un sous-groupe de $\mathrm{Cr}(k)$ isomorphe au produit semi-direct de $\mathbf{PGL}_2(k)$ par $\mathbf{PGL}_2(k(t))$. On peut l'interpréter comme le groupe des transformations birationnelles de $\mathbf{P}_1 \times \mathbf{P}_1$ qui sont compatibles avec la première projection : $\mathbf{P}_1 \times \mathbf{P}_1 \ \to \ \mathbf{P}_1$.

1.2. Le tore standard et son normalisateur

Soit T le produit de n exemplaires du groupe multiplicatif $\mathbf{G}_m$. Ce tore opère de façon évidente (par multiplication des coordonnées) sur $\mathbf{Aff}^n$, et aussi d'ailleurs sur $\mathbf{P}_n$, ce qui donne un plongement $T \to \mathrm{Cr}_n$. Nous dirons que T est le « tore standard » de Cr_n.

Le dual $T^* = \mathrm{Hom}(T, \mathbf{G}_m)$ de T est $\mathbf{Z}^n$. Le groupe d'automorphismes de T^* (qui est aussi celui de T) est le groupe $\Gamma = \mathbf{GL}_n(\mathbf{Z})$. Le produit semi-direct $N(k)$ de Γ par $T(k)$ opère sur T, donc se plonge dans $\mathrm{Cr}_n(k)$, ce que nous écrirons simplement $N = T.\Gamma \hookrightarrow \mathrm{Cr}_n$.

Lorsque k est algébriquement clos, on démontre que $T(k)$ est son propre centralisateur dans $\mathrm{Cr}_n(k)$ et que $N(k)$ est son normalisateur (cf. [De 70, prop. 10, cor. 5], dans un cadre un peu différent). Cette situation ressemble à celle que l'on a pour les groupes semi-simples, T jouant le rôle d'un tore maximal et Γ celui du groupe de Weyl (qui est toutefois infini si $n > 1$). Il y a aussi des analogues des racines (ce sont les éléments primitifs de T^*) et des sous-groupes additifs radiciels (il y en a une infinité pour chaque racine si $n > 1$, cf. [De 70, § 2]). On verra par la suite d'autres cas où l'analogie

$$\text{groupe de Cremona de rang } n \longleftrightarrow \text{ groupe semi-simple de rang } n$$

est à peu près justifiée — et aussi d'autres où elle ne l'est vraiment pas !

1.3. Le théorème de fusion

Dans un groupe fini, si un p-Sylow est commutatif, son normalisateur contrôle sa fusion (i.e. deux sous-groupes d'un p-Sylow qui sont conjugués dans le groupe le sont déjà dans le normalisateur du Sylow). De même, dans un groupe semi-simple, le groupe de Weyl contrôle la fusion du tore maximal. Ce sont là des résultats qui sont à la fois faciles à démontrer et très utiles (Borel, par exemple, en faisait grand usage).

Nous allons voir qu'il y a un résultat analogue pour les groupes de Cremona. Nous devrons toutefois faire l'hypothèse suivante :

$$\text{(D)} \qquad n \leqslant 2 \quad \text{ou} \quad \mathrm{car}(k) = 0.$$

[La lettre D est l'initiale de « désingularisation » : celle-ci intervient dans la démonstration, cf. fin du § 1.5.]

Voici l'énoncé du théorème :

THÉORÈME 1.1. — *Faisons l'hypothèse* (D) *ci-dessus. Soient A et B deux parties de $T(k)$ et soit $g \in \mathrm{Cr}_n(k)$ tel que $gAg^{-1} = B \subset \mathrm{Cr}_n(k)$. Il existe alors un élément γ de $\Gamma = \mathbf{GL}_n(\mathbf{Z})$ tel que $\gamma a \gamma^{-1} = gag^{-1}$ pour tout $a \in A$.*

(En particulier A et B sont conjugués dans $N(k)$.)

La démonstration sera donnée au § 1.6 ; comme on le verra, elle repose de façon essentielle sur des résultats de Reichstein et Youssin [RY 02].

Exemples. — a) Deux éléments de $T(k)$ qui sont conjugués dans $\mathrm{Cr}_n(k)$ le sont dans $N(k)$, cf. [Bl 06b, prop.6].

b) Soit $m \geqslant 1$ premier à $\mathrm{car}(k)$. Supposons que k contienne les racines m-ièmes de l'unité. Soit T_m le groupe des éléments $x \in T(k)$ tels que $x^m = 1$; ce groupe est abélien de type $(m, \ldots, m)$; on a $\mathrm{Aut}(T_m) = \mathbf{GL}_n(\mathbf{Z}/m\mathbf{Z})$. Le théorème 1.1, appliqué à $A = B = T_m$, dit que les seuls éléments de $\mathrm{Aut}(T_m)$ qui soient induits par des automorphismes intérieurs de $\mathrm{Cr}_n(k)$ sont ceux dont le déterminant dans $(\mathbf{Z}/m\mathbf{Z})^\times$ est égal à ± 1. Sous une forme un peu différente, ce résultat est dû à Reichstein et Youssin [RY 02].

PROBLÈME. — Y a-t-il une forme « infinitésimale » du théorème 1.1 ? Autrement dit, remplaçons dans l'énoncé l'hypothèse $A, B \subset T(k)$ par $A, B \subset \mathrm{Lie}(T)$; est-ce que le théorème est encore valable(2) ? Même le cas où A et B n'ont qu'un seul élément ne

(2) Il faut d'abord se convaincre qu'il a un sens. C'est clair du point de vue de [De 70], où $\mathrm{Lie}(\mathrm{Cr}_n)$ est défini comme le noyau de $\mathrm{Cr}_n(k[t]/(t^2)) \to \mathrm{Cr}_n(k)$. Plus concrètement, on peut voir un élément de $\mathrm{Lie}(T)$ comme une section rationnelle du fibré tangent à $\mathbf{Aff}^n$, et l'on peut donc le transformer par $g \in \mathrm{Cr}_n(k)$.

paraît pas évident. Lorsque $k = \mathbf{C}$, il est possible que la question puisse se traiter par voie analytique, en utilisant les feuilletages associés aux éléments non nuls de $\mathrm{Lie}(T)$.

1.4. Un lemme

Supposons k algébriquement clos.

LEMME 1.2. — *Soient V et V' deux sous-variétés fermées de T et soient V_o et V'_o des sous-ensembles denses de V et V'. Soit $g \in \mathrm{Cr}_n(k)$ tel que $g.V_o.g^{-1} = V'_o \subset \mathrm{Cr}_n(k)$. On a alors $g.V.g^{-1} = V'$ et l'application $v \mapsto g.v.g^{-1}$ est un isomorphisme de variétés de V sur V'.*

(Précisons que par « sous-variété » nous entendons « sous-schéma réduit, séparé et de type fini sur k » et que nous identifions une telle variété à l'ensemble de ses k-points. Cela donne une correspondance bijective entre parties fermées de $T(k)$ et sous-variétés fermées de T.)

Démonstration. — Identifions $\mathrm{Cr}_n(k)$ au groupe des automorphismes birationnels de T. L'application rationnelle $g : T \dashrightarrow T$ a un domaine de définition U qui est un ouvert dense de T ; elle définit un morphisme birationnel $g : U \to T$. D'autre part, si x est un élément de T on l'identifie à l'élément de $\mathrm{Cr}_n(k)$ donné par la translation τ_x de $T : \tau_x : z \mapsto z.x$. Si $v \in V_o$ et si $v' = gvg^{-1}$, on a $g \circ \tau_v = \tau_{v'} \circ g$ en tout point de $U \cap Uv^{-1}$. Soit U_2 l'ouvert de $V \times T$ formé des couples (v, z) tels que $z \in U$ et $z.v \in U$. Si $(v, z) \in U_2$, posons $F(v, z) = g(z.v).g(z)^{-1}$. L'application $F : U_2 \to T$ est un morphisme. De plus, si $v \in V_o$ et si $v' = gvg^{-1}$ comme ci-dessus, on a $F(v, z) = v'$ pour tout z tel que $(v, z) \in U_2$; or de tels points sont denses dans U_2 puisque V_o est dense dans V. Il en résulte, par continuité, que $F(U_2)$ est contenu dans V'. Ainsi, F se factorise en $U_2 \to V \to V'$. Comme la projection $U_2 \to V$ est surjective, on obtient ainsi un morphisme $f : V \to V'$, et par construction on a $f(v) = gvg^{-1}$ si $v \in V_o$. Le même argument, appliqué à V' donne un morphisme $f' : V' \to V$ qui est inverse de f. Cela démontre le lemme. $\square$

1.5. Démonstration du théorème 1.1

Revenons à la démonstration du th. 1.1. On peut supposer que k est algébriquement clos, et que A et B sont des sous-groupes de $T(k)$. Soient $\overline{A}$ et $\overline{B}$ leurs adhérences pour la topologie de Zariski ; ce sont des sous-groupes algébriques réduits (donc lisses) du tore T.

D'après le lemme 1.2, on a $g\overline{A}g^{-1} = \overline{B}$. Il suffit donc de prouver le théorème pour $\overline{A}$ et $\overline{B}$; autrement dit, on peut supposer que A et B sont des sous-groupes algébriques lisses de T. De plus, le lemme 1.2 dit que l'application $f : a \mapsto gag^{-1}$ est