

**332**

**ASTÉRISQUE**

**2010**

SÉMINAIRE BOURBAKI  
VOLUME 2008/2009  
EXPOSÉS 997-1011

(1002) *La conjecture de Weinstein en dimension 3*

Denis AUROUX

**SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE**

Publié avec le concours du CENTRE NATIONAL DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

**LA CONJECTURE DE WEINSTEIN EN DIMENSION 3**  
**[d'après C. H. Taubes]**

par **Denis AUROUX**

Étant donnée une variété fermée munie d'une forme de contact  $a$ , la conjecture de Weinstein [22] affirme l'existence d'orbites périodiques du champ de Reeb (le champ de vecteurs qui engendre le noyau de  $da$ ). Cette conjecture a été prouvée fin 2006 par C. H. Taubes [18] pour toute variété de contact de dimension 3. Le présent exposé décrit le résultat de Taubes et les principaux ingrédients de la preuve, en particulier les équations de Seiberg-Witten en dimension 3.

## 1. LA CONJECTURE DE WEINSTEIN

Soit  $M$  une variété compacte orientée de dimension  $2n + 1$ , équipée d'une forme de contact  $a$ , c'est-à-dire une 1-forme telle que  $a \wedge (da)^n$  soit une forme volume compatible avec l'orientation de  $M$ . Le champ d'hyperplans  $\xi = \text{Ker}(a)$  définit alors une structure de contact sur  $M$ .

La 2-forme  $da$  est de rang  $2n$ , et son noyau définit une famille de droites dans le fibré tangent  $TM$ , transverses aux hyperplans de contact ; le champ de Reeb est le champ de vecteurs  $v$  qui engendre ces droites, normalisé par la condition  $a(v) = 1$ .

**DÉFINITION 1.1.** — *Le champ de Reeb est l'unique champ de vecteurs  $v$  sur  $M$  tel que  $da(v, \cdot) = 0$  et  $a(v) = 1$ .*

Par exemple, en dimension 3, il existe des coordonnées locales  $(x, y, z)$  telles que  $a = dz - y dx$  ; le champ de Reeb est alors  $v = \partial/\partial z$ .

La conjecture de Weinstein [22], formulée il y a trente ans, affirme l'existence d'orbites périodiques du champ de Reeb sur les variétés compactes :

**CONJECTURE 1.2 (Weinstein).** — *Le champ de Reeb  $v$  possède au moins une courbe intégrale fermée.*

La conjecture de Weinstein était motivée par un résultat de Rabinowitz [12] affirmant l'existence d'orbites périodiques dans le cas particulier où  $M$  est une hypersurface étoilée dans  $\mathbb{R}^{2n}$  ; ce résultat a ensuite été étendu par Viterbo [21] au cas des hypersurfaces de type contact dans  $\mathbb{R}^{2n}$ . Plus récemment, des progrès spectaculaires ont été accomplis grâce à la théorie des courbes pseudo-holomorphes. Ainsi, le lien entre orbites périodiques du champ de Reeb sur la variété de contact  $M$  et courbes pseudo-holomorphes dans la symplectisation  $(M \times \mathbb{R}, d(e^t a))$  a permis à Hofer [3] d'établir la conjecture de Weinstein pour la sphère  $S^3$  munie d'une forme de contact arbitraire, ainsi que pour toutes les structures de contact vrillées en dimension 3, et pour toutes les variétés de dimension 3 telles que  $\pi_2(M) \neq 0$  (voir également l'exposé de F. Laudenbach au Séminaire Bourbaki [10]).

Divers autres cas particuliers de la conjecture de Weinstein en dimension 3 ont également été résolus relativement récemment : voir par exemple les travaux d'Abbas, Cieliebak et Hofer [1] pour le cas des variétés qui admettent un livre ouvert planaire, et de Gay [2] pour les variétés qui contiennent un tore de torsion non nulle.

Dans son article [18], Taubes établit la conjecture de Weinstein pour toutes les variétés de dimension 3. Son résultat peut être formulé de façon plus précise. Pour ceci, on rappelle que la forme  $da$  définit une structure symplectique sur le champ d'hyperplans de contact  $\xi = \text{Ker}(a)$ . On peut donc définir la classe de Chern  $c_1(\xi) \in H^2(M, \mathbb{Z})$ . Comme toute variété compacte orientée de dimension 3 est spin, la seconde classe de Stiefel-Whitney du fibré tangent  $TM = \xi \oplus \mathbb{R}v$  s'annule. Ceci implique que  $c_1(\xi)$  est divisible par 2.

**THÉORÈME 1.3** (Taubes [18]). — *Soit  $e \in H^2(M, \mathbb{Z})$  une classe telle que  $2e + c_1(\xi)$  soit un élément de torsion de  $H^2(M, \mathbb{Z})$ . Alors il existe une collection non vide de courbes intégrales fermées  $\gamma_i$  du champ de Reeb, et des multiplicités entières  $m_i \geq 1$ , telles que  $\sum m_i [\gamma_i] \in H_1(M, \mathbb{Z})$  représente le dual de Poincaré de  $e$ .*

La preuve de ce théorème repose sur une étude détaillée du comportement des solutions des équations de Seiberg-Witten sur  $M$  vis-à-vis d'une certaine perturbation des équations. Taubes montre que, si une suite de solutions des équations perturbées satisfait certaines estimées lorsque le paramètre de perturbation tend vers l'infini, alors il existe une sous-suite pour laquelle le lieu d'annulation d'une des composantes de la solution converge vers une collection d'orbites fermées du champ de Reeb. Ce résultat [18, théorème 2.1] est l'analogue en dimension 3 d'un théorème précédemment établi par Taubes, qui relie les équations de Seiberg-Witten sur les variétés symplectiques de dimension 4 aux courbes pseudo-holomorphes [15] (voir également les articles [14, 16] et l'exposé de D. Kotschick au Séminaire Bourbaki [8]). Nous tenterons d'esquisser les grandes lignes de l'argument au §2.

Le reste de la preuve du théorème 1.3 consiste alors à établir l'existence de solutions satisfaisant les conditions requises. Ceci repose sur les travaux de Kronheimer et Mrowka concernant l'homologie de Seiberg-Witten-Floer [9], et sur des estimées précises concernant le flot spectral et l'énergie des solutions [18]. Les principaux ingrédients de la preuve seront présentés au §3.

La relation qu'établit Taubes entre solutions des équations de Seiberg-Witten et orbites du champ de Reeb permet en fait d'obtenir des résultats beaucoup plus précis que le théorème 1.3. Taubes a récemment annoncé [20] un isomorphisme entre l'homologie de Seiberg-Witten-Floer déjà mentionnée, qui est l'homologie d'un complexe engendré par les solutions des équations de Seiberg-Witten, et l'homologie de contact plongée définie par M. Hutchings [4, 5, 6], qui est l'homologie d'un complexe engendré par des collections d'orbites fermées du champ de Reeb.

**THÉORÈME 1.4** (Taubes [20]). — *Soit  $M$  une variété compacte orientée de dimension 3, munie d'une forme de contact  $a$  générique. Alors la cohomologie de Seiberg-Witten-Floer de  $M$  est isomorphe à l'homologie de contact plongée de  $(M, a)$ .*

L'énoncé de ce théorème sera clarifié au §4, où nous donnerons une brève description de l'homologie de contact plongée.

Entre autres applications, la relation entre cohomologie de Seiberg-Witten-Floer et homologie de contact plongée permet à Taubes de construire des orbites fermées du champ de Reeb représentant des classes d'homologie plus générales que celles garanties par le théorème 1.3 [19]. Elle permet également à Hutchings et Taubes [7] de généraliser la conjecture de Weinstein aux variétés de dimension 3 munies d'une « structure hamiltonienne stable », c'est-à-dire une 1-forme  $a$  et une 2-forme  $\omega$  telles que  $d\omega = 0$ ,  $a \wedge \omega > 0$ , et  $\text{Ker}(\omega) \subset \text{Ker}(da)$  (les formes de contact correspondent au cas particulier  $\omega = da$ ).

## 2. ÉQUATIONS DE SEIBERG-WITTEN ET ORBITES DU CHAMP DE REEB

### 2.1. Les équations de Seiberg-Witten en dimension 3

Soit  $M$  une variété compacte orientée de dimension 3, et soit  $g$  une métrique riemannienne sur  $M$ . Le fibré des repères orthonormés directs de  $(TM, g)$  est un fibré principal au-dessus de  $M$ , de groupe structural  $SO(3)$ . D'autre part, l'action du groupe unitaire  $U(2)$  par rotations de la droite projective  $\mathbb{C}\mathbb{P}^1 \cong S^2$  induit un morphisme surjectif  $\pi : U(2) \rightarrow SO(3)$ , dont le noyau est le centre de  $U(2)$ , isomorphe à  $S^1$ .

DÉFINITION 2.1. — Une structure  $\text{spin}^c$  sur  $M$  est la donnée d'un relèvement (via la projection  $\pi$ ) du fibré des repères en un fibré principal  $P$  de groupe structural  $U(2)$ . Le fibré des spineurs  $\mathbb{S} = P \times_{U(2)} \mathbb{C}^2$  est le fibré vectoriel complexe de rang 2 associé à  $P$  via la représentation standard de  $U(2)$ .

L'ensemble des structures  $\text{spin}^c$  sur  $M$  est un espace principal homogène pour  $H^2(M, \mathbb{Z})$  : étant donné une structure  $\text{spin}^c$  et son fibré des spineurs  $\mathbb{S}$ , le fibré des spineurs pour une autre structure  $\text{spin}^c$  est de la forme  $\mathbb{S} \otimes E$ , où  $E$  est un fibré en droites complexes au-dessus de  $M$ .

Le fibré des spineurs est naturellement muni d'une métrique hermitienne, et d'une action du fibré cotangent  $T^*M$  par endomorphismes antihermitiens, appelée *multiplication de Clifford*, telle que  $cl(u)cl(v) + cl(v)cl(u) = -2g(u, v)\text{Id}$  pour tous  $u, v \in T^*M$ , et  $cl(e_1)cl(e_2)cl(e_3) = \text{Id}$  lorsque  $(e_1, e_2, e_3)$  est un repère orthonormé direct.

Une *connexion  $\text{spin}^c$*  sur le fibré des spineurs est une connexion hermitienne induite par une connexion sur le fibré principal  $P$  qui relève la connexion de Levi-Civita sur le fibré des repères. La multiplication de Clifford vérifie alors la règle de Leibniz. Une connexion  $\text{spin}^c$  est déterminée uniquement par la connexion hermitienne qu'elle induit sur le fibré déterminant  $\det(\mathbb{S}) = \wedge^2 \mathbb{S}$  : une connexion hermitienne  $\mathbb{A}$  sur  $\det(\mathbb{S})$  et la connexion de Levi-Civita déterminent une connexion  $\text{spin}^c$  sur  $\mathbb{S}$ , que l'on notera  $\nabla^{\mathbb{A}}$ .

L'*opérateur de Dirac* associé à une connexion  $\text{spin}^c$   $\nabla^{\mathbb{A}}$  est l'opérateur elliptique autoadjoint du premier ordre  $D_{\mathbb{A}} : \Gamma(\mathbb{S}) \rightarrow \Gamma(\mathbb{S})$  obtenu en composant la dérivation covariante  $\nabla^{\mathbb{A}} : \Gamma(\mathbb{S}) \rightarrow \Gamma(T^*M \otimes \mathbb{S})$  et la multiplication de Clifford  $T^*M \otimes \mathbb{S} \rightarrow \mathbb{S}$ .

Les équations de Seiberg-Witten sont des équations aux dérivées partielles concernant une section  $\psi \in \Gamma(\mathbb{S})$  du fibré des spineurs et une connexion hermitienne  $\mathbb{A}$  sur le fibré en droites  $\det(\mathbb{S})$ . Elles peuvent s'écrire sous la forme :

$$(1) \quad \begin{cases} *F_{\mathbb{A}} = \psi^* \tau \psi \\ D_{\mathbb{A}} \psi = 0 \end{cases}$$

où  $F_{\mathbb{A}} \in \Omega^2(M, i\mathbb{R})$  est la courbure de la connexion  $\mathbb{A}$ , et  $\psi^* \tau \psi \in \Omega^1(M, i\mathbb{R})$  est le dual pour la métrique  $g$  de la forme linéaire  $\langle \psi, cl(\cdot)\psi \rangle : T^*M \rightarrow i\mathbb{R}$ . Comme  $cl$  induit un isomorphisme compatible avec la métrique entre 1-formes à valeurs imaginaires pures et endomorphismes hermitiens de trace nulle de  $\mathbb{S}$ , la forme  $\psi^* \tau \psi$  est caractérisée par

$$(2) \quad cl(\psi^* \tau \psi) = -2\psi^* \otimes \psi + |\psi|^2 \text{Id}.$$

Les équations (1) sont invariantes sous l'action du *groupe de jauge*  $\mathcal{G} = C^\infty(M, S^1)$ , qui agit par  $u : (\mathbb{A}, \psi) \mapsto (\mathbb{A} - 2u^{-1}du, u\psi)$ . L'*espace des modules* est le quotient de l'espace des solutions par l'action du groupe de jauge.