332

ASTÉRISQUE

2010

SÉMINAIRE BOURBAKI
VOLUME 2008/2009
EXPOSÉS 997-1011

(1003) *Le théorème de la sphère différentiable*

Gérard BESSON

SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE
Publié avec le concours du CENTRE NATIONAL DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

Séminaire BOURBAKI Mars 2009
61e année, 2008-2009, n° 1003, p. 161 à 181

LE THÉORÈME DE LA SPHÈRE DIFFÉRENTIABLE
[d'après Brendle-Schoen]

par **Gérard BESSON**

INTRODUCTION

En 1951, H.E. Rauch ([**40**]) prouve qu'une variété riemannienne complète dont la courbure sectionnelle est positive et varie entre deux bornes dont le rapport est proche de 1 a un revêtement universel homéomorphe à une sphère. Plus précisément, pour $\delta > 0$, nous dirons qu'une variété riemannienne compacte M est *ponctuellement* δ-pincée lorsqu'en chaque point le rapport de la plus petite courbure sectionnelle à la plus grande est supérieur ou égal à δ. Nous dirons qu'elle est δ-pincée si c'est le rapport du minimum global (sur tout M) au maximum global qui vérifie cette inégalité. Enfin, elle est dite strictement δ-pincée (ponctuellement ou non) si cette inégalité est stricte. Cette notion peut s'utiliser aussi bien lorsque la courbure est négative que lorsqu'elle est positive. Dans ce texte, toute les variétés riemanniennes seront de courbure sectionnelle *strictement positive* ; pour des exemples de résultats en courbure négative on pourra consulter les articles [**27**] et [**43**]. Le théorème de Rauch affirme donc qu'une variété riemannienne simplement connexe δ-pincée, pour un δ explicite et proche de 1, est homéomorphe à une sphère. Par ailleurs, un calcul standard (voir [**21**] section 3.D.2, p. 149) montre que les projectifs complexes, de dimension complexe supérieure ou égale à 2, ont une courbure qui varie entre 1 et 4, pour un bon choix de leur normalisation ; c'est aussi le cas pour les autres espaces riemanniens symétriques compacts de rang un. Le théorème de Rauch ne peut donc être vrai pour une variété riemannienne de courbure positive 1/4-pincée (non strictement). Ce sont les travaux de M. Berger [**1**] et W. Klingenberg [**29**], dans les années 1960, qui conduisent au résultat optimal : une variété riemannienne simplement connexe *strictement* 1/4-pincée est homéomorphe à une sphère. Le lecteur peut consulter [**4**] (section 12.2.2.1, p. 552) pour une description de la technique ainsi qu'un historique plus précis.

Notons que ces résultats qui ressortissent à la relation courbure-topologie n'excluent pas que la variété soit une sphère exotique. C'est d'ailleurs une question intéressante de savoir si une sphère exotique peut porter une métrique riemannienne de courbure strictement positive. Un article récent ([**39**]), posté sur la Toile, propose un exemple pour lequel la réponse est positive. Le but de ce texte est de décrire le remarquable théorème suivant, dû à S. Brendle et R. Schoen.

THÉORÈME 0.1 (S. Brendle-R. Schoen [**10, 11**]). — *Soit M une variété riemannienne de courbure sectionnelle strictement positive et ponctuellement strictement* $1/4$*-pincée ; alors M admet une métrique de courbure sectionnelle constante. Elle est donc difféomorphe au quotient d'une sphère par un sous-groupe de $O(n)$.*

Une conséquence est donc qu'aucune sphère exotique n'admet de métrique strictement 1/4-pincée. Le résultat est important mais la méthode l'est tout autant. Elle repose sur l'utilisation du flot de la courbure de Ricci, introduit par R. Hamilton dans [**22**]. L'idée est de construire une déformation de la métrique riemannienne qui converge vers une métrique de courbure constante. Cette situation idéale ne se produit que lorsque la métrique de départ possède de bonnes propriétés. Rappelons que l'article séminal de R. Hamilton a connu des développements exceptionnels qui ont culminé en les travaux de G. Perelman ([**35, 36, 37**], voir aussi [**5**]) prouvant la conjecture de géométrisation. Dans [**22**], R. Hamilton prouve par cette méthode le théorème suivant.

THÉORÈME 0.2 (R. Hamilton [**22**]). — *Soit M une variété riemanienne compacte de dimension* 3 *qui possède une métrique de courbure de Ricci strictement positive ; alors elle possède une métrique de courbure constante.*

Ensuite, la même technique étendue à la dimension 4 permet à R. Hamilton de prouver les résultats contenus dans [**23, 26**].

C'est une remarquable généralisation aux dimensions quelconques qui constitue le cœur du travail que nous tentons de décrire et elle est due à Ch. Böhm et B. Wilking ([**6**]). On dira qu'un opérateur de courbure est 2-positif si la somme de ses deux plus petites valeurs propres est strictement positive. C'est une notion qui est apparue dans l'article [**14**] de H. Chen.

THÉORÈME 0.3 (Ch. Böhm-B. Wilking [**6**]). — *Soit M une variété riemannienne compacte d'opérateur de courbure* 2*-positif ; alors M admet une métrique de courbure constante.*

Les méthodes analytiques pour aborder 0.1 ne sont pas nouvelles. Elles sont présentes dans [**31**] où les auteurs utilisent la théorie des applications harmoniques et dans [**23**], [**30**], [**28**] et [**34**] avec le flot de Ricci. Notons que dans [**30**], Ch. Margerin étudie une condition de courbure naturelle et donne un résultat optimal. Il s'agit d'analyse géométrique et un élément essentiel est le principe du maximum pour les systèmes paraboliques qui permet de réduire la question à un problème algébrique et de répondre à l'interrogation : quelles sont les propriétés (inégalités) de la courbure qui sont préservées par le flot de Ricci ?

Dans le texte qui suit, nous nous limiterons aux dimensions supérieures ou égales à 4. Après quelques rappels sur les différentes notions de courbure, nous tenterons de décrire les principales étapes de la preuve. La première consiste à utiliser le principe du maximum mentionné ci-dessus afin de réduire le problème à l'étude d'une équation différentielle ordinaire sur l'espace des endomorphismes de courbure. La seconde consiste à exhiber des inégalités satisfaites par la courbure qui sont invariantes par ce système dynamique. Enfin, des arguments géométriques standards permettent de conclure. Les références générales sont [**21**] pour les bases de la géométrie riemannienne, [**4**] pour un panorama exhaustif de ses réussites et [**15, 16, 17**] pour le flot de Ricci. Ces dernières références sont exhaustives et la méthode de Ch. Böhm et B. Wilking est décrite avec tous les détails dans [**16**], chapite 11. Il ne nous a donc pas semblé utile de les reproduire. Ce texte est à utiliser comme un guide pour la lecture des articles originaux, très informatifs, et de ces ouvrages. Nous conseillons également le récent survol de S. Brendle et R. Schoen [**12**], ainsi que le livre [**9**].

Je tiens à remercier chaleureusement Ch. Böhm, S. Brendle, L. Ni et H. Seshadri pour leurs réponses patientes à mes questions naïves, ainsi que M. Berger, P. Bérard, L. Bessières, J-.P Bourguignon, Z. Djadli, S. Gallot, H. Nguyen et Th. Richard pour des échanges fructueux.

1. RAPPELS DE GÉOMÉTRIE RIEMANNIENNE

Dans ce qui suit, (M, g) est une variété riemannienne compacte. Nous désignerons indifféremment la métrique riemannienne par g ou $\langle .,. \rangle$. On note ∇ la dérivation covariante. Soient X, Y, Z et T des champs de vecteurs ; on définit le tenseur de courbure de type $(0,4)$ (voir [**21**]) par

$$R(X,Y,Z,T) = \langle \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_{[Y,X]} Z, T \rangle \,.$$

On montre que ce tenseur est antisymétrique par rapport à X et Y, ainsi que par rapport à Z et T et qu'il vérifie $R(X,Y,Z,T) = R(Z,T,X,Y)$. Il définit donc un endomorphisme symétrique de $\Lambda^2(TM)$ sur lui-même que nous noterons également R et qui s'appelle l'opérateur de courbure. Les conventions que nous utilisons ici sont celles de [**21**], le lecteur pourra les comparer à celles de [**16**]. Le tenseur de courbure vérifie également la première identité de Bianchi, qui est l'analogue de l'identité de Jacobi vérifiée par le crochet de Lie d'une algèbre de Lie. Plus précisément, on a

$$R(X,Y,Z,T)+R(Y,Z,X,T)+R(Z,X,Y,T)=0\,.$$

La courbure sectionnelle d'un 2-plan $P\subset T_mM$ tangent en m à M est

$$K(P)=\langle R(x\wedge y),x\wedge y\rangle\,,$$

où (x,y) est une base orthonormée de P. On note que K est la valeur de R calculée sur les vecteurs décomposés alors que R est défini sur tout $\Lambda^2(TM)$.

Si $\{e_i\}$ est une base orthonormée de T_mM, on munit $\Lambda^2(T_mM)$ du produit scalaire tel que $\{e_i\wedge e_j\}_{i<j}$ en est une base orthonormée. Nous noterons $R_{ijkl}=\langle R(e_i\wedge e_j),e_k\wedge e_l\rangle$. La courbure de Ricci en m est une forme bilinéaire symétrique sur T_mM que nous verrons également comme un endomorphisme symétrique de $\mathbf{R}^n$ (nous ferons l'abus de langage qui consiste à donner le même nom à ces deux objets). Elle est définie par

$$\mathrm{Ric}_{ij}=\mathrm{Ric}(e_i,e_j)=\langle\mathrm{Ric}(e_i),e_j\rangle=\sum_k R_{ikjk}\,.$$

C'est un tenseur de même nature que la métrique. Enfin, la courbure scalaire est la trace de la courbure de Ricci, c'est-à-dire, pour $m\in M$

$$\mathrm{scal}(m)=\sum_i \mathrm{Ric}_{ii}=\sum_{i,k}R_{ikik}=2\,\mathrm{trace}\,R\,.$$

Avec ces conventions l'opérateur de courbure de la sphère unité est l'identité, ses courbures sectionnelles sont toutes égales à 1, sa courbure de Ricci est égale à $(n-1)g$ et sa courbure scalaire est constante égale à $n(n-1)$.

1.1. Opérateurs de courbure algébriques

Pour $m\in M$, le choix d'une base orthonormée $\{e_i\}$ de T_mM permet de l'identifier à l'espace euclidien $\mathbf{R}^n$. Le produit scalaire permet aussi d'identifier $\Lambda^2(\mathbf{R}^n)$ avec l'algèbre de Lie $\mathfrak{so}(n)$ en associant au vecteur unitaire $e_i\wedge e_j$ l'endomorphisme de rang 2 qui est la rotation d'angle $\pi/2$ dans le plan engendré par e_i et e_j. Via cette identification $\langle A,B\rangle=-1/2\,\mathrm{trace}(AB)$, pour $A,B\in\Lambda^2(\mathbf{R}^n)$. L'espace des endomorphismes symétriques (que nous identifierons aux formes bilinéaires symétriques) de $\Lambda^2(\mathbf{R}^n)$ est noté $\mathcal{S}^2(\mathfrak{so}(n))$. Cet espace encode les trois premières relations satisfaites par le tenseur de courbure. Nous appelons opérateur de courbure algébrique un élément de $\mathcal{S}^2(\mathfrak{so}(n))$ qui vérifie de plus la première identité de Bianchi ; l'espace des opérateurs de courbures algébriques est noté $\mathcal{S}^2_B(\mathfrak{so}(n))$ (voir **[16]**, p. 81).