

332

ASTÉRISQUE

2010

SÉMINAIRE BOURBAKI
VOLUME 2008/2009
EXPOSÉS 997-1011

(1004) *Sur la géométrie et la dynamique
des transformations de contact*

Emmanuel GIROUX

SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE

Publié avec le concours du CENTRE NATIONAL DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

**SUR LA GÉOMÉTRIE ET LA DYNAMIQUE
DES TRANSFORMATIONS DE CONTACT**
[d'après Y. Eliashberg, L. Polterovich *et al.*]

par Emmanuel GIROUX

Au commencement étaient les transformations de contact...

Étant donné une variété M , les 1-jets des germes de fonctions $M \rightarrow \mathbf{R}$ forment une variété J^1M naturellement fibrée au-dessus de M . Parmi toutes les sections locales de ce fibré, les 1-jets des fonctions f définies sur un ouvert de M sont nommées sections holonomes et constituent une classe élue. Si $M = \mathbf{R}^n$ par exemple, $J^1M = \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}$ fibre par projection sur le premier facteur et une section

$$x \in \mathbf{R}^n \longmapsto (x, \varphi(x), f(x)) \in \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}$$

est holonome si et seulement si $\varphi = df$. Cette condition traduit en fait une propriété de contact, à savoir que la 1-forme $dt - \varphi$ sur $M \times \mathbf{R}$, $t \in \mathbf{R}$, s'annule identiquement sur l'espace tangent au graphe de f .

La condition d'holonomie est ainsi l'origine de la géométrie de contact. Lorsque S. Lie introduit les transformations de contact (Berührungstransformationen), c'est pour étudier les symétries des équations différentielles. Or une telle équation (en une variable) ou, plus généralement, une équation aux dérivées partielles du premier ordre sur les fonctions $M \rightarrow \mathbf{R}$ s'écrit $\Phi(x, df(x), f(x)) = 0$ et est donc donnée par une hypersurface $\{\Phi = 0\}$ dans l'espace J^1M . Une symétrie de l'équation est une transformation de J^1M qui préserve à la fois l'hypersurface $\{\Phi = 0\}$ et la condition d'holonomie, de manière à envoyer solution sur solution.

Une forme de contact sur J^1M est une 1-forme différentielle non singulière dont le rappel par toute section holonome locale est nul. De fait, il en existe une et une seule à multiplication près par une fonction. Son expression locale, c'est-à-dire pour $M = \mathbf{R}^n$, est

$$u(x, y, t) \left(dt - \sum_1^n y_i dx_i \right), \quad (x, y, t) \in \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}.$$

Le noyau des formes de contact est donc un champ d'hyperplans ξ bien défini qui admet pour sous-variétés intégrales tous les graphes des sections holonomes locales. Ainsi, une transformation de J^1M préserve la condition d'holonomie si et seulement si elle préserve ce champ ξ des hyperplans dits de contact. Un exemple emblématique est, sur $J^1\mathbf{R}^n$, la transformation de Legendre

$$(x, y, t) \in J^1\mathbf{R}^n = \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^n \times \mathbf{R} \longmapsto \left(-y, x, t - \sum_1^n x_j y_j\right).$$

Ce n'est apparemment que vers 1950, sans doute à l'instigation de S. S. Chern, que le champ d'hyperplans ξ reçoit le nom de structure de contact (étant la structure associée au pseudo-groupe des transformations de contact) et prend peu à peu le pas sur les transformations de contact pour devenir l'objet central de la géométrie de contact.

1. INTRODUCTION

Le travail présenté ici est dû à Yakov Eliashberg et Leonid Polterovich, ainsi qu'à Sang Seon Kim, Mohan Bhupal et Sheila Sandon. Les références en sont [2, 12, 13, 24], le dernier de ces articles redémontrant les résultats principaux du second par une méthode différente. L'intérêt majeur de ce travail est, à mes yeux, de mettre en lumière les rapports de force subtils qui existent, en géométrie de contact, entre flexibilité et rigidité.

Bien que la géométrie de contact soit de nos jours clairement identifiée comme une partie de la géométrie symplectique, elle a des particularités très fortes. On connaît par exemple peu d'invariants qui prennent un continuum de valeurs et ils sont de nature dynamique plutôt que géométrique. La raison en est que les variétés symplectiques attachées aux variétés de contact ont un volume et des capacités infinis. Ce caractère discret des invariants de contact apparaît nettement dans la suite, se traduisant en particulier par de brusques changements dans le comportement géométrique des transformations de contact.

A. Géométrie des transformations de contact

Dans $\mathbf{R}^{2n} = T^*\mathbf{R}^n = \mathbf{C}^n$ muni de sa structure symplectique standard, on considère la boule et le cylindre ouverts d'aire r , à savoir respectivement

$$B(r) = B^{2n}(r) = \{z \in \mathbf{C}^n \mid \pi|z|^2 < r\}$$

et $C(r) = C^{2n}(r) = \{z \in \mathbf{C}^n \mid \pi|z_1|^2 < r\}.$

Pour une simple raison de volume, $B(r_1)$ ne se plonge symplectiquement dans $B(r_2)$ que si $r_1 \leq r_2$. Mieux, le « Non-Squeezing Theorem » de M. Gromov, un des nombreux résultats de [16] révélateurs de la rigidité en géométrie symplectique, montre que $B(r_1)$ ne se plonge symplectiquement dans $C(r_2)$ que si $r_1 \leq r_2$.

Ces contraintes n'existent pas dans $\mathbf{R}^{2n+1} = J^1\mathbf{R}^n$ muni de sa structure de contact standard. Pour $r > 0$ petit par exemple, la transformation de contact $(x, y, t) \in \mathbf{R}^{2n+1} \mapsto (\sqrt{r}x, \sqrt{r}y, rt)$ envoie tout compact donné dans une boule arbitrairement petite et une isotopie de contact à support compact peut faire le même travail. Cependant, comme Y. Eliashberg, S. S. Kim et L. Polterovich le montrent dans [12], la situation est plus subtile dans la variété $J^1(\mathbf{R}^n, \mathbf{T})$ des 1-jets (des germes) de fonctions à valeurs dans le cercle $\mathbf{T} = \mathbf{R}/\mathbf{Z}$: on ne peut tasser n'importe quel domaine dans n'importe quel autre par des transformations de contact. Pour énoncer le résultat principal, on précise la terminologie.

DÉFINITION 1.1 ([12]). — *Étant donné des domaines (ouverts connexes) U_1 et U_2 dans une variété de contact (V, ξ) , on dit qu'on peut tasser U_1 dans U_2 si on peut trouver une isotopie de plongements de contact $\psi_s : \text{Adh } U_1 \rightarrow V$, $s \in [0, 1]$, entre l'inclusion ψ_0 et un plongement ψ_1 qui envoie $\text{Adh } U_1$ dans U_2 . On dit que le tassement se fait au sein d'un domaine $U_0 \subset V$ si $\psi_s(\text{Adh } U_1) \subset U_0$ pour tout $s \in [0, 1]$. Noter que, si U_1 est relativement compact, toute isotopie qui tasse U_1 dans U_2 au sein de U_0 se prolonge en une isotopie de contact ambiante à support compact dans U_0 .*

Pour tout domaine U de \mathbf{R}^{2n} , on notera \widehat{U} le produit $U \times \mathbf{T} \subset \mathbf{R}^{2n} \times \mathbf{T} = J^1(\mathbf{R}^n, \mathbf{T})$. Le théorème principal qu'on veut démontrer ici est le suivant :

THÉORÈME 1.2 ([12]). — (a) *En dimension $2n + 1 > 3$, n'importe quel domaine qui est relativement compact dans $\widehat{C}(1)$ peut être tassé dans $\widehat{B}(d)$ pour tout $d > 0$.*

(b) *Si $r_2 \leq k \leq r_1$ pour un certain entier k , on ne peut pas plonger $\widehat{\text{Adh } B}(r_1)$ dans $\widehat{C}(r_2)$ par une transformation de contact ambiante de $\mathbf{R}^{2n} \times \mathbf{T}$ à support compact et on ne peut donc pas tasser $\widehat{B}(r_1)$ dans $\widehat{C}(r_2)$.*

En dimension $2n + 1 = 3$, si $r_2 < r_1$ (et même si $r_1 < 1$), les résultats de [9] (voir aussi [15]) montrent qu'on ne peut pas tasser $\widehat{B}(r_1)$ dans $\widehat{B}(r_2)$. En dimension supérieure, par contre, on ne sait pas s'il est possible de tasser $\widehat{B}(r_1)$ dans $\widehat{B}(r_2)$ ou même dans $\widehat{C}(r_2)$ quand $k - 1 < r_2 < r_1 < k$ pour un certain entier $k > 1$.

On peut reformuler en partie l'énoncé précédent en regardant, pour tout domaine borné $U \subset \mathbf{R}^{2n}$, les quantités suivantes :

- $w_-(U)$, le supremum des nombres r pour lesquels $B(r)$ se plonge symplectiquement dans U ;
- $w_+(U)$, l'infimum des nombres r tels que U se plonge symplectiquement dans $C(r)$;

- $\widehat{w}(U)$, l'infimum des nombres r tels que le domaine $r^{-1/2}U \times \mathbf{T} \subset \mathbf{R}^{2n} \times \mathbf{T}$ puisse être tassé dans $\widehat{B}(r')$ quel que soit $r' > 0$.

L'encadrement ci-dessous traduit fidèlement le point (b) du théorème 1.2 et l'impossibilité de tasser $\widehat{B}(1)$ dans $\widehat{B}(r)$ pour r arbitrairement petit :

COROLLAIRE 1.3 ([12]). — *Pour tout domaine borné $U \subset \mathbf{R}^{2n}$, $n \geq 2$,*

$$w_-(U) \leq \widehat{w}(U) \leq w_+(U).$$

Un autre phénomène intéressant mis à jour par Eliashberg, Kim et Polterovich est que le tassement, quand il est possible, nécessite de la place. Par exemple, si $r_2 \leq 1/m \leq r_1 < 1$ pour un certain entier m , on peut tasser $\widehat{B}(r_1)$ dans $\widehat{B}(r_2)$ (théorème 1.2-(b)) mais pas au sein de $\widehat{B}(1/(m-1))$. De façon plus générale :

THÉORÈME 1.4 ([12]). — *Si $r_2 \leq k/m \leq r_1 < k/(m-1)$ pour des entiers k et m , on ne peut pas plonger $\text{Adh } \widehat{B}(r_1)$ dans $\widehat{B}(r_2)$ par une transformation de contact de $\mathbf{R}^{2n} \times \mathbf{T}$ qui préserve $\widehat{B}(k/(m-1))$. En particulier, on ne peut pas tasser $\widehat{B}(r_1)$ dans $\widehat{B}(r_2)$ au sein de $\widehat{B}(k/(m-1))$.*

Dans [12], pour démontrer les théorèmes 1.2-(b) et 1.4, Eliashberg, Kim et Polterovich élaborent une homologie de Floer généralisée pour les structures hamiltoniennes stables. Cette théorie leur permet d'interpréter l'homologie symplectique convenablement filtrée d'un ouvert étoilé générique $U \subset \mathbf{R}^{2n}$ [7, 14, 33] comme un invariant de contact du domaine $\widehat{U} = U \times \mathbf{T} \subset \mathbf{R}^{2n} \times \mathbf{T}$, invariant du type de ceux issus de la théorie symplectique des champs [11].

Dans un article tout récent [24], S. Sandon a présenté une approche plus spécifique mais aussi efficace en pratique et bien plus économique. La méthode, fondée sur la théorie des fonctions génératrices, produit également des invariants homologiques ainsi qu'un invariant de type capacité. Crise oblige, c'est cette approche qu'on suivra ici.

B. Ordonnement des transformations de contact

Le point de départ du travail d'Eliashberg et Polterovich [12, 13] est la recherche d'une géométrie sur le groupe des transformations de contact et l'étude d'une relation de préordre naturelle sur le revêtement universel de celui-ci. Une conclusion inattendue de leur travail est que le comportement de ce préordre est intimement lié aux phénomènes de tassement discutés dans la section ci-dessus.

Soit (K, η) une variété de contact, $\mathcal{G} = \mathcal{G}(K, \eta)$ la composante neutre du groupe $\mathcal{D}_c(K, \eta)$ des transformations de contact de (K, η) à support compact et $\widetilde{\mathcal{G}} = \widetilde{\mathcal{G}}(K, \eta)$ le revêtement universel de \mathcal{G} .