332

ASTÉRISQUE

2010

SÉMINAIRE BOURBAKI
VOLUME 2008/2009
EXPOSÉS 997-1011

(1006) *Corps de classes des schémas arithmétiques*

Tamás SZAMUELY

SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE
Publié avec le concours du CENTRE NATIONAL DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

Séminaire BOURBAKI Mars 2009
61^{e} année, 2008-2009, n^{o} 1006, p. 257 à 286

CORPS DE CLASSES DES SCHÉMAS ARITHMÉTIQUES

par **Tamás SZAMUELY**

INTRODUCTION

La théorie des corps de classes représente l'acmé de l'étude classique des corps de nombres. Son objet est la description des extensions abéliennes d'un corps global K au moyen d'invariants arithmétiques attachés à K. C'est le point culminant d'une longue série de travaux partant des recherches de Gauss sur les lois de réciprocité, et le fruit des efforts de mathématiciens aussi éminents que Weber, Hilbert, Takagi, Artin, Hasse ou Chevalley, pour ne nommer que quelques-uns. C'est aussi le point de départ de nombre de sujets centraux en arithmétique moderne, tels que le programme de Langlands, la théorie d'Iwasawa, ou les principes locaux-globaux sur les points rationnels. Et c'est également un outil fondamental dans l'étude de cet objet plein de mystère qui est le groupe de Galois absolu de $\mathbf{Q}$.

Les premiers pas vers une généralisation en dimension supérieure ont été faits par Lang [**28**], [**27**], pour les variétés sur les corps finis. C'est sauf erreur la dernière fois où le sujet a été évoqué dans ce séminaire [**45**]. Pourtant, des développements très significatifs ont émergé vers la fin des années 1970, grâce aux travaux de Parshin [**33**] dans le cas local et Bloch [**3**] dans le cas global. Leur idée était d'utiliser des K-groupes de Milnor dans la construction des invariants arithmétiques attachés à des schémas de dimension supérieure, le cas classique étant celui du groupe $K_1 = \mathbf{G}_m$. Ce programme a été mené à bien dans une série de travaux ([**17**], [**21**], [**20**], [**22**], [**36**]) de K. Kato et S. Saito, qui donnent une description des revêtements étales abéliens d'un schéma régulier connexe de type fini sur $\mathbf{Z}$. Un point faible de cette théorie est que les invariants construits via la K-théorie sont très compliqués (sauf dans le cas propre), ce qui les rend peu propices aux applications. Mais l'utilisation de la K-théorie a également un avantage : elle fournit un lien avec la théorie des régulateurs sur les

K-groupes et les groupes de cycles des schémas arithmétiques, objets d'un faisceau de conjectures « motiviques » justement célèbres.

Récemment, une nouvelle approche plus élémentaire a été trouvée par le regretté G. Wiesend. Elle permet de retrouver la plupart des résultats principaux de Kato et Saito sous une forme simplifiée, notamment le cas de caractéristique 0, ainsi que le cas où X est propre sur $\mathbf{Z}$. En particulier, elle donne une nouvelle démonstration de la finitude du groupe de Chow $CH_0(X)$ des zéro-cycles d'un schéma régulier propre et plat sur $\mathbf{Z}$, et de la finitude de la partie de degré zéro $CH_0(X)^0 \subset CH_0(X)$ pour une variété projective et lisse sur un corps fini ; dans ce dernier cas le résultat de Wiesend est même un peu plus général, et ne requiert que l'hypothèse de propreté au lieu de la projectivité. Sa méthode n'utilise pas la K-théorie et est purement globale, évitant les localisations élaborées utilisées précédemment. Par contre, le lien avec les conjectures motiviques n'apparaît pas explicitement. Nous avons donc décidé de discuter en annexe ce qui est peut-être le plus joli exemple de l'approche cohomologique : la théorie non ramifiée pour les variétés sur les corps finis.

Les arguments de Wiesend, publiés dans les notes [**51**], [**52**] et [**53**], contenaient des lacunes et des imprécisions. Ils ont été mis au propre dans les publications [**25**] et [**26**] de Kerz et Schmidt, qui ont également trouvé des améliorations. L'article de Kerz [**24**] y apporte des compléments et des arguments alternatifs. Nous avons suivi ces sources lors de la rédaction de la majeure partie de cet exposé.

Bien entendu, beaucoup reste encore à faire dans le domaine. Un des problèmes ouverts majeurs est la description fine des revêtements abéliens ramifiés via une théorie généralisée de conducteurs ; des premiers pas sont faits dans [**19**]. Une autre tâche, non sans lien avec la précédente, est le développement d'une théorie analytique satisfaisante qui jouerait le rôle de la thèse de Tate en dimension supérieure.

Mais il existe également des aspects déjà bien étudiés dont nous ne pouvons rendre compte dans le cadre du présent exposé. Mentionnons-en deux. Le premier est la théorie des corps de classes pour les corps locaux supérieurs. Ce sont les corps qui apparaissent quand on complète successivement les anneaux locaux de schémas arithmétiques réguliers le long d'une chaîne maximale de sous-schémas fermés. Cette théorie, qui a joué un rôle clef dans l'approche de Kato et Saito à la théorie globale, a été développée par Kato dans la série d'articles [**17**], et aussi d'une autre façon par Fesenko et ses collaborateurs. Nous renvoyons le lecteur intéressé au livre [**6**] et aux références citées dedans. Un deuxième sujet fascinant est l'ensemble de conjectures proposées par Kato dans son article fondamental [**18**]. Elles donnent une généralisation en dimension supérieure de la suite exacte d'Albert–Brauer–Hasse–Noether décrivant le groupe de Brauer d'un corps global, elle-même l'un des résultats centraux de la théorie des corps de classes classique. Une grande partie de ces conjectures a été démontrée au cours de la dernière quinzaine d'années par Jannsen, Saito et leurs collaborateurs. Ces résultats très importants n'ont été rédigés que partiellement à ce jour (voir [**14**], [**15**]), et mériteront certainement un exposé à part entière.

Le rédacteur tient à exprimer sa gratitude à Jean-Louis Colliot-Thélène et à Alexander Schmidt pour des corrections apportées *in extremis.*

1. RAPPELS SUR LA THÉORIE CLASSIQUE

Soit K un corps global, i.e. une extension finie de $\mathbf{Q}$ ou de $\mathbf{F}(t)$ pour un corps fini $\mathbf{F}$. Pour une place v de K notons K_v le complété de K par rapport à v et, pour v fini, notons $\mathcal{O}_v \subset K_v$ son anneau des entiers. Suivant Chevalley, l'anneau $\mathbf{A}_K$ des adèles de K est défini comme le sous-anneau du produit direct de tous les K_v constitué des suites (a_v) avec $a_v \in \mathcal{O}_v$ pour tout v sauf pour un nombre fini de places finies. Le groupe $\mathbf{I}_K \subset \mathbf{A}_K$ des unités de $\mathbf{A}_K$ est appelé le groupe des idèles de K. Il est muni de la topologie dans laquelle une base de sous-groupes ouverts de 1 est donné par les sous-groupes

$$\prod_{v\in S} W_v \times \prod_{v\notin S} \mathcal{O}_v^\times,$$

où S est un ensemble fini de places contenant les places infinies, et W_v est un sous-groupe ouvert de $K_v^\times$. Pour toute place v le morphisme

$$i_v : K_v^\times \to \mathbf{I}_K, \qquad a_v \mapsto (1,\dots,1,a_v,1,\dots,1)$$

est un plongement topologique. On considère également l'application diagonale

$$i : K^\times \to \mathbf{I}_K, \qquad a \mapsto (a,a,\dots,a),$$

dont on note C_K le conoyau, muni de la topologie quotient. C'est *le groupe des classes d'idèles* de K.

Pour v fini on dispose de *l'application de réciprocité locale*

$$\rho_v : K_v^\times \to \mathrm{Gal}\,(\overline{K}_v|K_v)^{\mathrm{ab}},$$

où $\overline{K}_v$ est une clôture séparable de K_v et G^{ab} désigne l'abélianisé du groupe G. Elle est définie par exemple dans [**44**], chap. XIII, §4. On définit ρ_v aux places infinies comme suit : si $K_v = \mathbf{C}$, on pose $\rho_v = 0$; si $K_v = \mathbf{R}$, on envoie $\mathbf{R}_+^\times$ sur 0, et -1 sur la conjugaison complexe engendrant $\mathrm{Gal}\,(\mathbf{C}|\mathbf{R})$.

Avec ces notations on peut résumer les énoncés principaux de la théorie globale dans la formulation de Chevalley comme suit.

THÉORÈME 1.1. — *Soit K un corps global, et soit $\overline{K}$ une clôture séparable de K.*

(1) *Il existe un unique homomorphisme* $\widetilde{\rho} : \mathbf{I}_K \to \mathrm{Gal}\,(\overline{K}|K)^{\mathrm{ab}}$ *faisant commuter les diagrammes*

$$\begin{array}{ccc} K_v^{\times} & \xrightarrow{\rho_v} & \mathrm{Gal}\,(\overline{K}_v|K_v)^{\mathrm{ab}} \\ {\scriptstyle i_v}\big\downarrow & & \big\downarrow \\ \mathbf{I}_K & \xrightarrow{\widetilde{\rho}} & \mathrm{Gal}\,(\overline{K}|K)^{\mathrm{ab}} \end{array}$$

pour toute place v*. Ici le morphisme vertical de droite est induit par l'envoi de* $\mathrm{Gal}\,(\overline{K}_v|K_v)$ *sur un sous-groupe de décomposition de* v *dans* $\mathrm{Gal}\,(\overline{K}|K)$.

(2) (Loi de réciprocité globale) *On a*

$$(\widetilde{\rho} \circ i)(K^{\times}) = 0,$$

d'où un morphisme induit $\rho : C_K \to \mathrm{Gal}\,(\overline{K}|K)^{\mathrm{ab}}$*, appelé application de réciprocité globale.*

(3) *Si* $\mathrm{car}(K) = 0$*, le morphisme* ρ *est surjectif, et son noyau est la composante connexe de l'identité du groupe abélien topologique* C_K*. C'est aussi le sous-groupe divisible maximal de* C_K*.*

Si $\mathrm{car}(K) > 0$*, le groupe* $\mathrm{Gal}\,(\overline{K}|K)^{\mathrm{ab}}$ *admet comme quotient canonique le groupe* $\mathrm{Gal}\,(\overline{\mathbf{F}}|\mathbf{F}) \cong \widehat{\mathbf{Z}}$*, engendré topologiquement par l'automorphisme de Frobenius* F*. Le morphisme* ρ *est injectif, et son image dans* $\mathrm{Gal}\,(\overline{K}|K)^{\mathrm{ab}}$ *est le sous-groupe des éléments qui s'envoient sur une puissance de* F *dans* $\mathrm{Gal}\,(\overline{\mathbf{F}}|\mathbf{F})$.

(4) (Isomorphisme de réciprocité global) *Pour tout quotient fini de la forme* $\mathrm{Gal}\,(L|K)$ *de* $\mathrm{Gal}\,(\overline{K}|K)^{\mathrm{ab}}$ *l'application de réciprocité* ρ *induit un isomorphisme*

$$C_K/N_{L|K}C_L \xrightarrow{\sim} \mathrm{Gal}\,(L|K).$$

Ici l'application norme $N_{L|K} : C_L \to C_K$ *est induite par les applications norme usuelles* $N_{L_w|K_v} : L_w^{\times} \to K_v^{\times}$*, où* w *est une place de l'extension finie* L *de* K *au-dessus de* v*.*

(5) (Théorème d'existence) *L'application de réciprocité* ρ *induit une bijection entre les sous-groupes ouverts d'indice fini* $U \subset C_K$ *et les sous-groupes ouverts de* $\rho(C_K) \subset \mathrm{Gal}\,(\overline{K}|K)^{\mathrm{ab}}$*. En outre, tout* U *comme ci-dessus est de la forme* $N_{L|K}(C_L)$ *pour une extension finie abélienne* $L|K$ *convenable. Si* $\mathrm{car}(K) = 0$*, tout sous-groupe ouvert de* C_K *est d'indice fini.*

Pour les démonstrations, voir par exemple **[1]**, chapitres 7 et 8.

Une théorie plus fine est obtenue en considérant des *modules*. Par définition, un module est une série d'entiers $\mathfrak{m} = (n_v)$, avec v parcourant les places de K. Les n_v doivent être nuls sauf pour un nombre fini de places finies ou réelles, et égaux à 0 ou à 1 pour une place réelle. L'ordre usuel de $\mathbf{Z}$ induit un ordre partiel naturel sur l'ensemble des modules.