332

ASTÉRISQUE

2010

SÉMINAIRE BOURBAKI
VOLUME 2008/2009
EXPOSÉS 997-1011

(1007) *Un théorème de la limite centrale pour les ensembles convexes*

Franck BARTHE

SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE
Publié avec le concours du CENTRE NATIONAL DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

Séminaire BOURBAKI Juin 2009
61e année, 2008-2009, n° 1007, p. 287 à 304

UN THÉORÈME DE LA LIMITE CENTRALE POUR LES ENSEMBLES CONVEXES [d'après Klartag et Fleury-Guédon-Paouris]

par **Franck BARTHE**

INTRODUCTION

À l'interface de la théorie locale des espaces de Banach et de la théorie de Brunn-Minkowski-Lusternik, la géométrie asymptotique des convexes étudie les propriétés métriques ou volumiques des corps convexes (i.e. les sous-ensembles convexes, compacts de $\mathbb{R}^n$ dont l'intérieur n'est pas vide) en grande dimension n en cherchant les bonnes dépendances dimensionnelles. Le résultat fondateur de ce domaine est certainement le théorème de Dvoretzky, revisité par Milman **[32, 33]** qui assure que, pour tout corps convexe $K \subset \mathbb{R}^n$, symétrique par rapport à l'origine, il existe un sous-espace vectoriel F de dimension au moins $c(\varepsilon)\log n$ tel que l'intersection $K \cap F$ soit euclidienne à ε près, au sens suivant : il existe un ellipsoïde $\mathscr{E} \subset F$ tel que

$$(1-\varepsilon)\mathscr{E} \subset K \cap F \subset (1+\varepsilon)\mathscr{E}.$$

Par dualité il existe aussi des projections de K de dimension au moins $c(\varepsilon)\log n$ qui sont presque euclidiennes. Ce résultat structurel est un exemple des phénomènes de grande dimension, qui vont souvent à l'encontre de notre intuition spatiale.

Formulé il y a plus de dix ans, le problème de la limite centrale pour les corps convexes demande essentiellement si la mesure uniforme sur un corps convexe de grande dimension possède une marginale presque gaussienne. Il s'agit donc d'établir un analogue du théorème de Dvoretzky où l'on considère les projections des mesures sur des sous-espaces plutôt que les projections des ensembles. Il est à noter que le problème de la limite centrale est non-trivial pour des projections de rang 1, ce qui est bien différent du contexte ensembliste. Après de multiples contributions qui ont apporté des réponses partielles, la conjecture a été résolue indépendamment par Klartag et Fleury-Guédon-Paouris en 2006. Par la suite, Klartag a grandement amélioré la précision des estimations quantitatives.

Le cadre de cet exposé est l'espace $\mathbb{R}^n$ muni de la structure euclidienne induite par le produit scalaire $\langle x, y\rangle = \sum_{i=1}^n x_i y_i$ et la norme associée $|x| = \langle x, x\rangle^{1/2}$. On note $B_2^n = \{x \in \mathbb{R}^n;\ |x| \leq 1\}$ la boule unité et S^{n-1} la sphère unité, que l'on munit de la probabilité uniforme σ_{n-1}. Nous utiliserons aussi les probabilités invariantes μ_n sur le groupe spécial orthogonal $SO(n)$ et $\sigma_{n,k}$ sur la grassmannienne $G_{n,k}$ formée des sous-espaces vectoriels de dimension k de $\mathbb{R}^n$. La projection orthogonale sur un sous-espace vectoriel E sera notée P_E. Dans tout l'exposé, $c, C, c', C', \ldots$ sont des constantes numériques qui peuvent changer d'une ligne à l'autre, mais que nous notons de la même manière pour ne pas alourdir les notations.

1. LE PROBLÈME DE LA LIMITE CENTRALE

1.1. Deux exemples significatifs

Si un vecteur aléatoire $\Theta^{(N)} = (\Theta_1^{(N)}, \ldots, \Theta_N^{(N)})$ est uniformément distribué sur la sphère de rayon $\sqrt{N}$, il est bien connu depuis Maxwell que $\Theta_1^{(N)}$ converge en loi vers une variable gaussienne standard G (de loi $\exp(-t^2/2)\, dt/\sqrt{2\pi},\ t \in \mathbb{R}$). Par ailleurs le principe d'Archimède nous assure que $(\Theta_1^{(N)}, \ldots, \Theta_{N-2}^{(N)})$ est uniformément distribué sur $\sqrt{N} B_2^{N-2}$. On en déduit aisément que si X est un vecteur uniforme sur $\sqrt{n+2}\, B_2^n$, alors $\mathbb{E}X_i = 0$, $\mathbb{E}(X_i X_j) = \delta_{i,j}$, et que si n est grand la loi de X_1 est presque gaussienne. L'invariance par rotation permet de dire pour tout $\theta \in S^{n-1}$ que la loi de $\langle X, \theta\rangle$ est presque gaussienne.

Considérons maintenant $X^{(n)} = (X_1, \ldots, X_n)$ uniformément distribué sur le cube $[-\sqrt{3}, \sqrt{3}]^n$. Comme les variables X_i sont indépendantes et vérifient $\mathbb{E}X_i = 0$, $\mathbb{E}(X_i^2) = 1$ le théorème de la limite centrale nous assure de la convergence en loi

$$\frac{X_1 + \cdots + X_n}{\sqrt{n}} \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} G.$$

Il est cependant naturel de considérer d'autres directions que $(1/\sqrt{n}, \ldots, 1/\sqrt{n}) \in S^{n-1}$. En notant $F_T(t) = \mathbb{P}(T \leq t)$ la fonction de répartition d'une variable aléatoire réelle T, le théorème de Berry-Esseen nous donne que, pour tout $\theta \in S^{n-1}$ et $t \in \mathbb{R}$,

$$|F_{\langle X^{(n)}, \theta\rangle}(t) - F_G(t)| \leq 6 \frac{\sum_{i=1}^n \mathbb{E}\big(|\theta_i X_i|^3\big)}{\Big(\sum_{i=1}^n \mathbb{E}\big(|\theta_i X_i|^2\big)\Big)^3} \leq 20 \max_{1 \leq i \leq n} |\theta_i|.$$

Il n'est pas difficile de vérifier que cette dernière quantité est petite en moyenne

$$\int_{S^{n-1}} \max_{1 \leq i \leq n} |\theta_i|\, d\sigma_{n-1}(\theta) \approx \sqrt{\frac{\log n}{n}}.$$

En utilisant la concentration de la mesure sphérique (voir plus loin pour un énoncé précis), on en déduit aisément l'existence de constantes numériques c, C telles que

$$\sigma_{n-1}\left(\left\{\theta \in S^{n-1};\ \max_{1\le i\le n} |\theta_i| \le C\sqrt{\frac{\log n}{n}}\right\}\right) \ge 1 - \frac{1}{n^c}.$$

Donc pour la plupart des directions $\theta \in S^{n-1}$, la marginale de la mesure uniforme sur le cube dans la direction de θ est presque gaussienne et les estimées s'améliorent avec la dimension.

1.2. Formulation précise

Le problème de la limite centrale demande si le phénomène observé sur ces deux exemples est universel. Ceci revient à postuler une variante inédite du théorème de la limite centrale où une hypothèse géométrique de convexité remplace la notion d'indépendance. Afin de formuler plus explicitement le problème, il convient de préciser la normalisation.

Définition 1.1. — *On dira qu'un corps convexe $K \subset \mathbb{R}^n$ est (en position) isotrope si $\mathrm{vol}_n(K) = 1$, $\int_K x\,dx = 0$ et s'il existe un nombre $L_K > 0$ tel que pour tout $\theta \in S^{n-1}$*

$$\int_K \langle x, \theta\rangle^2 dx = L_K^2.$$

Pour tout corps convexe, il existe une transformation affine qui permet de le mettre en position isotrope.

Conjecture 1.2. — *Existe-t-il des suites (ε_n) et (η_n) décroissantes et de limite nulle telles que, pour tout $n \ge 1$ et pour tout corps convexe isotrope $K \subset \mathbb{R}^n$, on ait*

$$\sigma_{n-1}\left(\left\{\theta \in S^{n-1};\ d\Big(\langle \frac{X}{L_K}, \theta\rangle, G\Big) \ge \varepsilon_n\right\}\right) \le \eta_n,$$

où X est un vecteur aléatoire uniforme sur K, G est une variable gaussienne standard et d est une distance sur les lois des variables (norme uniforme entre fonctions de répartition par exemple) ?

Cette question, posée dans les articles d'Antilla-Ball-Perissinaki [**2**] (paru en 2003 mais disponible dès 1998) et Brehm-Voigt [**12**], a suscité beaucoup d'intérêt (voir notamment [**4, 6, 10, 11, 25, 28, 30, 36, 37, 41, 44**]). Elle a été résolue par Klartag [**21**] et Fleury-Guédon-Paouris [**16**] (indépendamment, Klartag légèrement plus tôt) avec des suites $\varepsilon_n \le (\log n)^{-\kappa}$. Par la suite, Klartag [**22**] a obtenu une forte amélioration avec $\varepsilon_n \le n^{-\kappa}$, pour un $\kappa < 1$. Par ailleurs ses travaux montrent l'existence de beaucoup de marginales presque gaussiennes de dimension de l'ordre de n^κ et se placent dans le cadre fonctionnel naturel des mesures de probabilités log-concaves.

Définition 1.3. — *Une mesure de probabilité borélienne μ sur $\mathbb{R}^n$ est log-concave si elle admet une densité $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^+$ vérifiant pour tous $\lambda \in [0,1]$, $x, y \in \mathbb{R}^n$*

$$f\big(\lambda x + (1-\lambda)y\big) \geq f(x)^\lambda f(y)^{1-\lambda}.$$

On dira qu'un vecteur aléatoire Y est centré réduit si son espérance est nulle et sa matrice de covariance est égale à l'identité ($\mathbb{E}Y = 0$, $\mathrm{Cov}(Y) = \mathrm{Id}$). Il est clair que dans la formulation du problème central limite, le vecteur aléatoire $Y = X/L_K$ est log-concave et centré réduit.

1.3. Réduction à l'hypothèse de concentration

Il est apparu dès le début que le problème se réduit à la question suivante, d'apparence bien plus simple : existe-t-il une suite (ε_n) de limite nulle telle que pour tout vecteur aléatoire Y à valeurs dans $\mathbb{R}^n$ centré réduit et uniforme sur un convexe (ou plus généralement log-concave)

$$\mathbb{P}\left(\left|\frac{|Y|}{\sqrt{n}} - 1\right| \geq \varepsilon_n\right) \leq \varepsilon_n? \tag{1}$$

Notons que les hypothèses de normalisation assurent que $\sqrt{n} = \big(\mathbb{E}(Y^2)\big)^{1/2}$. Dans le cas d'un vecteur uniforme sur un convexe, il s'agit de montrer que la plus grande partie du volume du convexe est contenue dans une couronne dont l'épaisseur est négligeable devant le rayon.

L'énoncé qui justifie cette nouvelle formulation du problème se trouve dans [**2**] pour le cas des mesures uniformes sur les convexes (voir aussi [**4**] pour l'extension au cadre log-concave et des raffinements) :

Proposition 1.4. — *Soit (ε_n) une suite qui vérifie l'hypothèse* (1). *Alors, pour tous $n \geq 1$, $\delta > 0$ et tout vecteur aléatoire $Y \in \mathbb{R}^n$ centré réduit et log-concave, on a*

$$\sigma_{n-1}\left(\left\{\theta \in S^{n-1};\ \sup_{t\in\mathbb{R}}\Big|\mathbb{P}\big(\langle Y,\theta\rangle \leq t\big) - \mathbb{P}\big(G \leq t\big)\Big| \geq \frac{c}{\sqrt{n}} + \varepsilon_n + \delta\right\}\right) \leq 2e^{-cn\delta^2}.$$

Nous allons expliquer les idées qui permettent de démontrer cette proposition. Elles remontent à Sudakov [**43**], qui a remarqué que lorsque Y est centré réduit, mais pas forcément log-concave, la plupart des variables $(\langle Y,\theta\rangle)_{\theta\in S^{n-1}}$ ont à peu près la même loi. Le point essentiel dans son argument est l'utilisation du phénomène de concentration de la mesure sphérique, qui est une conséquence de l'inégalité isopérimétrique de Lévy (voir par exemple [**35, 39**]). Nous en rappelons l'énoncé.

Théorème 1.5. — *Soit $f : S^{n-1} \to \mathbb{R}$ une fonction L-lipschitzienne pour la distance induite par $\mathbb{R}^n$, alors pour tout $u > 0$,*

$$\sigma_{n-1}\left(\left\{\theta \in S^{n-1};\ \left|f(\theta) - \int f\, d\sigma_{n-1}\right| \geq u\right\}\right) \leq 2e^{-\frac{nu^2}{2L^2}}.$$