332 ASTÉRISQUE

2010

SÉMINAIRE BOURBAKI
VOLUME 2008/2009
EXPOSÉS 997-1011

(1008) *Équidistribution des orbites toriques sur les espaces homogènes*

Emmanuel BREUILLARD

SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE
Publié avec le concours du CENTRE NATIONAL DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

Séminaire BOURBAKI Juin 2009
61e année, 2008-2009, n° 1008, p. 305 à 339

ÉQUIDISTRIBUTION DES ORBITES TORIQUES SUR LES ESPACES HOMOGÈNES [d'après M. Einsiedler, E. Lindenstrauss, Ph. Michel, A. Venkatesh]

par **Emmanuel BREUILLARD**

1. INTRODUCTION

Soit $G = SL(d, \mathbb{R})$, $\Gamma = SL(d, \mathbb{Z})$, A le sous-groupe des matrices diagonales et $\Omega = \Gamma \backslash G$, l'espace des réseaux unimodulaires de $\mathbb{R}^d$. Soit H un sous-groupe fermé de G et dg une mesure de Haar sur G ou sur Ω. Depuis que Raghunathan a mis en évidence à la fin des années 1970 tout le profit qu'il y aurait à tirer de l'étude des H-orbites $x \cdot H$ dans Ω, $x \in \Omega$, pour diverses questions classiques de théorie des nombres, beaucoup de chemin a été parcouru. Margulis (1986) a démontré la conjecture d'Oppenheim en suivant cette stratégie et Ratner (1990) a répondu aux conjectures de Raghunathan en donnant une description précise des propriétés topologiques et statistiques du système dynamique (Ω, H, dg) *lorsque H est un sous-groupe fermé engendré par des unipotents de G*. Pour de tels sous-groupes H (par exemple si H est semi-simple sans facteurs compacts) l'adhérence des orbites est « algébrique » : cela veut dire que cette adhérence est elle-même l'orbite d'un sous-groupe fermé L contenant H et possédant une mesure L-invariante finie. Un des aspects surprenants de la preuve de Ratner est qu'elle déduit ce théorème topologique d'un théorème métrique : elle classifie d'abord les mesures ergodiques H-invariantes sur Ω. Forts de ce résultat, de ses généralisations naturelles dans le contexte S-arithmétique, et des nouvelles techniques dites de linéarisation développées par Dani, Margulis et Shah, de nombreux auteurs (voir par exemple [**29**], [**28**], [**26**], [**32**]) ont fait intervenir ces théorèmes dans diverses situations comme le comptage des points entiers sur une variété homogène, l'équidistribution des translatées de H-orbites, et même récemment la conjecture d'André-Oort ([**72**],[**38**]).

Dans cet exposé, nous nous intéressons au cas opposé où le sous-groupe H n'est pas engendré par des unipotents. Plus précisément nous supposons que $H = A$ est le tore diagonal. Là aussi de nombreuses études ont été poursuivies, mais certaines questions importantes demeurent. Le cas $d = 2$ est dans une large mesure bien compris : il correspond au flot géodésique sur une surface hyperbolique, ici la surface modulaire. On sait alors décrire les A-orbites via le codage markovien (voir par exemple [**67**]). Dans ce cas, la plupart des A-orbites ont un comportement chaotique. Par exemple on construit facilement des A-orbites dont l'adhérence a une dimension de Hausdorff qui peut prendre une infinité de valeurs entre $1 = \dim A$ et $3 = \dim G$. De même ces compacts invariants peuvent être les supports de mesures de probabilité A-invariantes et ces mesures peuvent avoir de l'entropie pour l'action de A. Lorsque $d \geq 3$ la situation est très différente et un phénomène de rigidité lié au rang supérieur (i.e. l'existence d'au moins deux actions linéairement indépendantes qui commutent) apparaît : on s'attend au contraire – voir plus bas §5 et l'article de Margulis [**46**] pour une formulation précise de ces conjectures – à ce que les adhérences de A-orbites soient beaucoup mieux contrôlées et que les mesures de probabilité A-invariantes et ergodiques soient elles aussi « algébriques », c'est-à-dire des mesures de Haar sur des sous-espaces homogènes de Ω. Après le travail initial de Katok et Spatzier [**37**] deux méthodes (dites de haute entropie et basse entropie) permettant de préciser la nature algébrique des mesures ergodiques A-invariantes ont vu le jour pour culminer avec le théorème de Einsiedler-Katok-Lindenstrauss [**20**] affirmant

THÉORÈME 1.1 (Einsiedler-Katok-Lindenstrauss [**20**]). — *Toute mesure de probabilité A-invariante ergodique sur Ω ayant de l'entropie positive pour au moins un sous-groupe à un paramètre de A est algébrique.*

Comme pour le théorème de Ratner, la classification des mesures A-invariantes sur Ω, et donc le théorème d'Einsiedler-Katok-Lindenstrauss, possède potentiellement des applications arithmétiques. Par exemple, Margulis a observé qu'une réponse positive à sa conjecture (sans condition supplémentaire d'entropie positive) impliquerait la fameuse conjecture de Littlewood en approximation diophantienne (voir plus bas §4). Malheureusement, vérifier la condition d'entropie positive demande souvent une hypothèse supplémentaire : par exemple on montre dans [**20**] que l'ensemble des exceptions possibles à Littlewood est de dimension de Hausdorff zéro en raisonnant par l'absurde et en construisant une mesure d'entropie positive. Il en est de même pour l'ensemble des contre-exemples éventuels (A-orbites irrégulières) à la conjecture de Margulis.

Dans [**22**] Einsiedler, Lindenstrauss, Michel et Venkatesh s'intéressent à la distribution des A-orbites compactes dans Ω. Ils posent entre autres les questions suivantes : est-ce que seul un nombre fini de A-orbites compactes peuvent rester confinées dans un compact donné de Ω ? Une suite d'orbites compactes dont le volume tend vers l'infini devient-elle toujours équidistribuée pour la mesure de Haar dans Ω ?

Alors qu'on s'attend (d'après ces mêmes conjectures de Margulis) à une réponse positive à la première question, les auteurs de [**22**] obtiennent la réponse approchée suivante (on définit au §2 la notion de discriminant d'une orbite compacte) :

THÉORÈME 1.2 ([**22**]). — *On fixe $d \geq 3$. Soit C un compact de Ω. Le nombre de A-orbites compactes contenues dans C et de discriminant au plus D est $\ll_\varepsilon D^\varepsilon$.*

C'est donc très peu d'orbites car le nombre total d'orbites de discriminant au plus D est polynomial en D (cf. proposition 2.3). La réponse à la seconde question est non (voir plus bas §3). Cependant, les auteurs de [**22**] conjecturent :

CONJECTURE 1.3. — *Soit $\rho > 0$ et $(x_n \cdot A)_n$ une suite de A-orbites compactes dans Ω de discriminant D_n telle que $\mathrm{vol}(x_n \cdot A) \geq (D_n)^\rho$ pour tout entier n. Alors si μ_n est la mesure de probabilité A-invariante sur $x_n \cdot A$, la suite μ_n converge vers la mesure de Haar normalisée sur Ω.*

Dans les deux cas il s'agit de vérifier que l'hypothèse faite (sur le nombre d'orbites de discriminant au plus D dans le cas du théorème 1.2 et sur le volume de l'orbite dans le cas de la conjecture 1.3) se traduit par une condition d'entropie positive pour toute limite faible des μ_n. Cette idée repose sur ce que ses auteurs appellent le « principe de Linnik » en hommage à Y. Linnik qui, dans son livre [**44**], a été un des premiers à étudier le problème de la distribution des A-orbites compactes d'un point de vue ergodique.

Soit Y_n une A-orbite ou un ensemble fini de A-orbites de discriminant au plus D_n. On note $\mathrm{vol}(Y_n)$ le volume total de Y_n et μ_n la mesure de Haar normalisée sur Y_n (i.e. la mesure de probabilité assignant un poids relatif à chaque orbite égal à son volume A-invariant). Si μ est une mesure A-invariante sur Ω et $a \in A$, on note $h_\mu(a)$ l'entropie de μ pour la translation à droite par a.

PROPOSITION 1.4 ([**22**] « Principe de Linnik »). — *Supposons qu'il existe un $\rho > 0$ tel que $\mathrm{vol}(Y_n) \geq (D_n)^\rho$ et soit μ_∞ une valeur d'adhérence de la suite μ_n qui est de masse totale 1 sur Ω. Alors $h_{\mu_\infty}(a) \geq \rho \cdot h(a)$ pour tout $a \in A$, où $h(a)$ est une fonction positive sur A et strictement positive sur les éléments réguliers de A.*

Moyennant ce principe on obtient facilement la

Preuve du théorème 1.2. — Soit μ_∞ une valeur d'adhérence de μ_D la mesure A-invariante normalisée sur Y_D la réunion des A-orbites compactes de discriminant au plus D incluses dans C. Comme C est compact, il n'y a pas de fuite de masse et $\mu_\infty(\Omega) = 1$. Le volume d'une A-orbite compacte est clairement minoré par une constante strictement positive car la plus grande valeur propre d'un élément semi-simple $\mathbb{R}$-déployé de Γ est elle-même minorée. Ainsi si le cardinal de Y_D est au moins D^ε, c'est que le volume total de Y_D est aussi au moins D^ε. Par le principe de

Linnik, μ_∞ a de l'entropie positive, donc possède une composante ergodique d'entropie positive. Celle-ci est algébrique d'après le théorème 1.1. Mais son support est compact : c'est donc la probabilité A-invariante sur une A-orbite compacte. Mais une telle mesure est d'entropie nulle (translation sur un tore). D'où la contradiction. $\square$

L'application du principe à la seconde question, i.e. à la conjecture 1.3 permet de montrer que toute limite μ_∞ possède de l'entropie. Le problème est que, bien que clairement A-invariante, μ_∞ n'est pas nécessairement ergodique. Ce type de problème est classique dans les applications arithmétiques du théorème de Ratner et les techniques de linéarisation de Dani-Margulis et Shah ([**13**] [**68**]) ont été développées en partie pour y remédier. Il peut aussi y avoir fuite de masse (voir §3). Dans cette situation il faut donc se contenter de :

Corollaire 1.5 ([**22**]). — *On fixe $d = 3$ et on se place dans la situation de la conjecture 1.3. Pour toute mesure limite μ_∞ des μ_n telle que $\mu_\infty(\Omega) > 0$ on note $\nu_\infty = \frac{\mu_\infty}{\mu_\infty(\Omega)}$ la mesure renormalisée. Alors $\nu_\infty \geq \rho \cdot c \cdot dg$ où dg est la mesure de Haar normalisée sur Ω et $c > 0$ est une constante.*

Démonstration. — C'est la conséquence de la combinaison du principe de Linnik et du théorème 1.1 d'Einsiedler-Katok-Lindenstrauss. Plus précisément, fixons $a \in A$ un élément régulier (i.e. à valeurs propres de modules distincts). Soit $\mu_\infty = \int_X \nu_\xi dm(\xi)$ la décomposition ergodique de μ_∞ pour l'action de a. Écrivons $\mu_\infty = t\nu_1 + (1-t)\nu_2$ où ν_1 (resp. ν_2) est la partie de la décomposition de μ_∞ dont les composantes ergodiques ν_ξ sont d'entropie strictement positive (resp. nulle) pour a. D'après le théorème 1.1 chaque ν_ξ est algébrique, i.e. L-invariante pour un certain sous-groupe fermé L contenant A. Notons que $A \subsetneq L$ car la mesure de Haar sur une A-orbite compacte est d'entropie nulle pour tout $a \in A$. Mais comme $d = 3$, la seule possibilité est que $L = G$ (voir la discussion après le théorème 4.3 plus bas) et donc $\nu_\xi = dg$ et $h_{\nu_1}(a) = h_{dg}(a)$. On sait par ailleurs calculer $h_{dg}(a)$, c'est la somme des $\log^+$ des valeurs propres de a, il est donc strictement positif. Mais $h_{\mu_\infty}(a) = \int h_{\nu_\xi}(a)dm(\xi) = th_{\nu_1}(a)$ et $h_{\mu_\infty} \geq c(a) \cdot \rho$ d'après le principe de Linnik 1.4. D'où $t \geq \frac{c(a)}{h_{dg}(a)} \cdot \rho$. $\square$

Lorsque d est premier impair la conclusion subsiste avec la même preuve. Pour d quelconque en revanche des mesures algébriques intermédiaires peuvent en principe apparaître et la conclusion qu'on tire par cette méthode est donc plus faible. De toute façon cet argument n'interdit pas une fuite de masse éventuelle. Néanmoins lorsque l'on considère $\Omega = \Gamma' \backslash G$ où Γ' est un réseau arithmétique co-compact associé à une algèbre à division sur $\mathbb{Q}$, alors le principe de Linnik reste valide et la co-compacité fait qu'il n'y a pas de problème de fuite de masse : les auteurs de [**22**] en déduisent alors semblablement que la réunion d'une *suite stricte* de A-orbites compactes (i.e. telle que seul un nombre fini d'entre elles soient contenues dans une L-orbite périodique