332

ASTÉRISQUE

2010

SÉMINAIRE BOURBAKI
VOLUME 2008/2009
EXPOSÉS 997-1011

(1011) *Variétés hyperboliques de petit volume*

Sylvain MAILLOT

SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE
Publié avec le concours du CENTRE NATIONAL DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

Séminaire BOURBAKI Juin 2009
61e année, 2008-2009, n° 1011, p. 405 à 417

VARIÉTÉS HYPERBOLIQUES DE PETIT VOLUME
[d'après D. Gabai, R. Meyerhoff, P. Milley, ...]

par **Sylvain MAILLOT**

INTRODUCTION

Soit M une variété lisse. Une *métrique hyperbolique* sur M est une métrique riemannienne g_{hyp} complète de courbure sectionnelle constante égale à -1. Dans cet exposé, nous nous intéresserons principalement au cas où le volume de g_{hyp} est fini. Si la dimension de M est au moins 3, le théorème de rigidité de Mostow-Prasad implique qu'une variété donnée M ne peut admettre qu'une seule métrique hyperbolique de volume fini à isométrie près. Si c'est le cas, nous dirons que M est une *variété hyperbolique*. Les invariants métriques de g_{hyp}, en particulier le volume, ne dépendent donc que de M.

En dimension 2, le théorème de rigidité de Mostow ne s'applique pas, mais le volume est tout de même un invariant topologique. En effet, si M est une surface, disons fermée et orientable, la formule de Gauss-Bonnet donne $\mathrm{Vol}(g_{\mathrm{hyp}}) = 2\pi|\chi(M)|$ où $\chi(M)$ est la caractéristique d'Euler de M. Par conséquent, l'ensemble des volumes des surfaces hyperboliques est discret, et le volume croît avec la complexité topologique. En particulier, la surface de plus petit volume est celle de genre 2, qui est aussi la plus simple.

En dimension 3, la question est plus complexe. Il n'est pas évident *a priori* qu'il existe une variété hyperbolique de plus petit volume, ni même que l'infimum de l'ensemble des volumes soit non nul. Dans la section 1, on rappellera des résultats classiques de Kazhdan-Margulis, Thurston et Jørgensen qui impliquent que c'est le cas. On notera ici v_0 le plus petit élément de l'ensemble $\mathcal{V}$ des volumes des variétés hyperboliques orientables de dimension 3.

Se pose alors la question naturelle de déterminer la (ou les) variété(s) réalisant ce minimum. Un candidat a été proposé indépendamment par J. Weeks, d'une part, et A. Fomenko et S. Matveev [**36**], d'autre part. À l'aide du programme SnapPea,

J. Weeks et C. Hodgson **[29]** ont effectué un « recensement » des variétés hyperboliques et calculé des valeurs approchées de leurs volumes, donnant ainsi du poids à la conjecture selon laquelle la variété de Weeks-Fomenko-Matveev est l'unique variété de volume minimal, ce volume étant approximativement 0,9427.

La première minoration publiée de v_0 est due à R. Meyerhoff **[38]**. Elle est de 0,00064, qui comme on le voit est très loin du compte. Cette minoration a été ensuite améliorée dans une série de travaux dont certains seront traités plus en détail dans la section 2 **[2, 4, 20, 22, 23, 35, 37, 44, 45]**.

Dans une autre direction, une série de travaux de M. Culler, P. Shalen et leurs collaborateurs (voir par exemple les articles **[3, 13]** et leurs références) ont montré qu'il existe une corrélation entre volume et complexité topologique.

Dans ce texte, on se limite par souci de simplicité aux variétés orientables de dimension 3. On peut bien entendu poser la même question en dimension supérieure, pour les variétés non-orientables, ou pour les orbifolds (voir par exemple les articles **[1, 14, 24, 27, 28, 31, 32]** et leurs références). Il ne sera ici que très peu question de ces généralisations. Nous n'entrerons pas non plus dans les détails de la preuve du théorème de Gabai-Meyerhoff-Milley ; le lecteur intéressé est renvoyé aux articles originaux, ainsi qu'au texte d'exposition **[18]**.

1. STRUCTURE DE L'ENSEMBLE DES VOLUMES

1.1. Le lemme de Margulis

Soit (M, g_{hyp}) une variété hyperbolique de dimension n. Un résultat élémentaire de géométrie riemannienne affirme que le revêtement universel $\tilde{M}$ de M muni de la métrique induite $\tilde{g_{\text{hyp}}}$ est isométrique à l'espace hyperbolique réel de dimension n, que nous notons $\mathbf{H}^n$. Une fois fixée une identification de $\tilde{M}$ avec $\mathbf{H}^n$, on peut considérer le groupe fondamental $\pi_1 M$ comme un sous-groupe du groupe $\mathrm{Isom}(\mathbf{H}^n)$ des isométries de $\mathbf{H}^n$. Si M est orientable, ce que l'on supposera toujours dans la suite, alors $\pi_1 M$ est inclus dans le sous-groupe $\mathrm{Isom}^+(\mathbf{H}^n)$ de $\mathrm{Isom}(\mathbf{H}^n)$ formé des éléments qui préservent l'orientation. De plus, ce sous-groupe est sans torsion et discret pour la topologie usuelle. Nous appellerons *groupe kleinéen* un sous-groupe de $\mathrm{Isom}^+(\mathbf{H}^n)$ ayant ces deux propriétés.

Pour $n = 3$, on peut identifier $\mathrm{Isom}^+(\mathbf{H}^3)$ avec $\mathrm{PSL}_2(\mathbf{C})$. Si l'on voit $\mathbf{H}^3$ comme la boule unité ouverte de $\mathbf{R}^3$ avec la métrique de Poincaré, alors l'action de $\mathrm{Isom}(\mathbf{H}^3)$ sur $\mathbf{H}^3$ se prolonge en une action sur la boule unité fermée $\overline{\mathbf{H}^3}$. Il est possible d'identifier la sphère $\overline{\mathbf{H}^3} - \mathbf{H}^3$ (la « sphère à l'infini ») avec $\mathbf{CP}^1$ de sorte que l'action induite de $\mathrm{PSL}_2(\mathbf{C})$ sur $\mathbf{CP}^1$ soit l'action standard.

On classifie les éléments de $\mathrm{PSL}_2(\mathbf{C})$ en trois types de la façon suivante. Soit γ un élément de $\mathrm{PSL}_2(\mathbf{C})$ différent de $\pm \mathrm{I}$. Si γ est diagonalisable, on dit qu'il est *semi-simple*. Il est alors conjugué à $\left(\begin{smallmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda^{-1} \end{smallmatrix}\right)$ pour un certain $\lambda \in \mathbf{C}^*$. Si $|\lambda| = 1$, on dit que γ est *elliptique*. Sinon, on dit que γ est *hyperbolique*.

Une isométrie semi-simple γ fixe exactement deux points de la sphère à l'infini $\mathbf{CP}^1$. L'unique géodésique de $\mathbf{H}^3$ reliant ces deux points est appelé l'*axe* de γ. Si l'on écrit la valeur propre λ comme $e^{(l+i\theta)/2}$ avec $l, \theta \in \mathbf{R}$, alors on peut interpréter géométriquement γ comme une sorte de vissage, dont l serait la longueur algébrique de translation et θ l'angle de rotation. Le cas elliptique correspond donc à une rotation pure.

Si γ n'est pas diagonalisable, alors γ est conjugué à $\left(\begin{smallmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$ et on dit que γ est *parabolique*. Dans ce cas γ fixe exactement un point de $\mathbf{CP}^1$.

Si $x \in \mathbf{CP}^1$, on appelle *horoboule* centrée en x une partie de $\mathbf{H}^3$ de la forme $B - \{x\}$, où B est une boule fermée de $\overline{\mathbf{H}^3}$ tangente à $\mathbf{CP}^1$ en x. Ces ensembles sont stabilisés par les isométries paraboliques ayant x comme point fixe.

Soit $\Gamma \subset \mathrm{PSL}_2(\mathbf{C})$ un groupe kleinéen. Il est facile de voir que Γ ne peut pas contenir d'élément elliptique. On dit que Γ est *élémentaire* s'il existe un point $x \in \mathbf{CP}^1$ qui est fixé par tous les éléments de Γ. Il existe trois types de sous-groupes élémentaires :

1. hyperbolique : un groupe infini cyclique constitué d'éléments hyperboliques de même axe ;
2. parabolique de rang 1 : un groupe infini cyclique constitué d'éléments paraboliques ayant même point fixe à l'infini ;
3. parabolique de rang 2 : un groupe abélien libre de rang 2 constitué d'éléments paraboliques ayant même point fixe à l'infini.

Nous nous intéressons à la partie de M formée des points où le rayon d'injectivité est petit. Comme nous sommes en courbure négative, ce sont exactement les points y par lesquels il passe un petit lacet non-homotope à zéro. Un tel lacet correspond à un élément du groupe fondamental de M dont l'action sur $\mathbf{H}^3$ a la propriété de ne pas beaucoup bouger un certain relevé de y.

Si Γ est un groupe kleinéen, x un point de $\mathbf{H}^3$ et ε un nombre réel strictement positif, on note $\Gamma_{x,\varepsilon}$ le sous-groupe de Γ engendré par les éléments γ tels que la distance (pour la métrique hyperbolique) entre x et $\gamma(x)$ est inférieure ou égale à ε.

Théorème 1.1 (Lemme de Margulis [**30**]). — *Il existe une constante universelle $\mu_3 > 0$ telle que, pour tout $\varepsilon \in]0, \mu_3]$, pour tout groupe kleinéen Γ et tout $x \in \mathbf{H}^3$, le groupe $\Gamma_{x,\varepsilon}$ soit élémentaire.*

Dans la suite on fixe une telle constante μ_3 (appelée « constante de Margulis »).

Définition 1.2. — *Soient M une variété hyperbolique de dimension* 3 *et* $\varepsilon > 0$. *La* partie ε-mince *de M est l'ensemble des points $x \in M$ tel qu'il existe un élément $\gamma \in \pi_1 M - \pm \mathrm{I}$ et un relevé $\tilde{x} \in \mathbf{H}^3$ de x satisfaisant $d(\tilde{x}, \gamma\tilde{x}) \leq \varepsilon$. La* partie ε-épaisse *est le complémentaire de la partie ε-mince.*

Le lemme de Margulis nous permet d'obtenir une description précise de la partie ε-mince d'une variété hyperbolique pour ε inférieur ou égal à la constante de Margulis.

Soient $R > 0$, $\Gamma \subset \mathrm{PSL}_2(\mathbf{C})$ un groupe élémentaire hyperbolique et L l'axe commun des éléments de Γ. Rappelons que le *R-voisinage* de L est l'ensemble des points de $\mathbf{H}^3$ dont la distance à L est inférieure ou égale à R. Le quotient de cet ensemble par Γ est appelé *tube de Margulis*. On dit que R est le *rayon* de ce tube, et la géodésique fermée $L/\Gamma \subset M$ en est l'*âme*. Topologiquement, un tube de Margulis est un *tore solide*, c'est-à-dire qu'il est homéomorphe à $S^1 \times D^2$.

Si B est une horoboule centrée en un point $x \in \mathbf{CP}^1$ et Γ un groupe élémentaire parabolique dont le point fixe est x, alors on appelle *voisinage de cusp* le quotient de B par Γ. Cet ensemble est homéomorphe à $[0, +\infty[\times S^1 \times \mathbf{R}$ ou $[0, +\infty[\times S^1 \times S^1$ selon si le rang de Γ est 1 ou 2.

Le lemme de Margulis a la conséquence suivante :

Corollaire 1.3. — *Soient M une variété hyperbolique de dimension* 3 *et* $\varepsilon \in]0, \mu_3]$. *Alors chaque composante connexe de la partie ε-mince de M est un tube de Margulis ou un voisinage de cusp.*

Cet énoncé est valable même si la métrique hyperbolique a un volume infini. Dans le cas où le volume est fini, on obtient des résultats plus précis. Premièrement, il n'y a pas de voisinage de cusp de rang 1, car ceux-ci ont un volume infini. Deuxièmement, il y a au plus un nombre fini de tubes de Margulis et de cusps de rang 2.

En particulier, si M est compacte, la partie mince est entièrement constituée de tubes de Margulis. Si M est non-compacte, chaque bout de M admet un voisinage homéomorphe à $T^2 \times [0, +\infty[$. Il existe donc une variété à bord $\bar{M}$ de dimension 3 compacte, dont les composantes de bord sont des tores, et telle que M soit homéomorphe à l'intérieur de $\bar{M}$. Les bouts de M sont appelés des *cusps*.

Du point de vue de la question qui nous intéresse, à savoir le problème du volume minimal, le lemme de Margulis implique que l'infimum des volumes des variétés hyperboliques de dimension 3 est strictement positif. En effet, il résulte du corollaire 1.3 que la partie μ_3-épaisse de M est non-vide, ce qui permet de minorer le volume de M par celui d'une boule de rayon μ_3 dans $\mathbf{H}^3$.