339

ASTÉRISQUE

2011

SÉMINAIRE BOURBAKI
VOLUME 2009/2010
EXPOSÉS 1012-1026

(1014) *Algèbres amassées et applications*

Bernhard KELLER

SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE

Publié avec le concours du CENTRE NATIONAL DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

Séminaire BOURBAKI Novembre 2009
62^{e} année, 2009-2010, n^{o} 1014, p. 63 à 90

ALGÈBRES AMASSÉES ET APPLICATIONS
[d'après Fomin-Zelevinsky, ...]

par **Bernhard KELLER**

INTRODUCTION

Les algèbres amassées (cluster algebras), inventées [**38**] par Sergey Fomin et Andrei Zelevinsky au début des années 2000, sont des algèbres commutatives, dont les générateurs et les relations sont construits de façon récursive. Parmi ces algèbres se trouvent les algèbres de coordonnées homogènes sur les grassmanniennes, les variétés de drapeaux et beaucoup d'autres variétés qui jouent un rôle important en géométrie et théorie des représentations. La motivation principale de Fomin et Zelevinsky était de trouver un cadre combinatoire pour l'étude des bases canoniques dont on dispose [**68**] [**81**] dans ces algèbres et qui sont étroitement liées à la notion de positivité totale [**82**] dans les variétés associées. Il s'est avéré rapidement que la combinatoire des algèbres amassées intervenait également dans de nombreux autres sujets, par exemple dans

- la géométrie de Poisson [**52**] [**53**] [**54**] [**5**] ... ;
- les systèmes dynamiques discrets [**41**] [**69**] [**24**] [**63**] ... ;
- les espaces de Teichmüller supérieurs [**32**] [**33**] [**30**] [**34**] ... ;
- la combinatoire et en particulier l'étude de polyèdres tels les associaèdres de Stasheff [**19**] [**18**] [**60**] [**76**] [**36**] [**37**] [**85**] [**86**] ... ;
- la géométrie algébrique (commutative ou non commutative) et en particulier l'étude des conditions de stabilité de Bridgeland [**6**], les algèbres Calabi-Yau [**64**] [**55**], les invariants de Donaldson-Thomas [**66**] [**75**] [**91**] [**46**] ... ;
- et la théorie des représentations des carquois et des algèbres de dimension finie, voir par exemple les articles de synthèse [**8**] [**92**] [**93**] [**50**] [**71**].

Nous renvoyons aux articles d'initiation [**40**] [**107**] [**104**] [**105**] [**106**] et au portail des algèbres amassées [**35**] pour plus d'informations sur les algèbres amassées et leurs liens avec d'autres sujets mathématiques (et physiques).

Dans cet exposé, nous donnons une introduction concise aux algèbres amassées (section 1) et présentons deux applications :

- la démonstration de la périodicité de certains systèmes dynamiques discrets, d'après Fomin-Zelevinsky [**41**] et l'auteur [**71**] [**72**] (section 2.3) ;
- la construction de bases duales semi-canoniques, d'après Geiss-Leclerc-Schröer [**48**] (section 3.4).

Ces applications sont fondées sur la catégorification additive des algèbres amassées à l'aide de catégories de représentations de carquois (avec relations). Nous en décrivons les idées principales à la section 4. Nous y esquissons également des développements récents importants liés à la catégorification monoïdale d'algèbres amassées [**58**] [**88**] et à leur étude via les carquois à potentiel [**22**] [**23**].

1. DESCRIPTION ET PREMIERS EXEMPLES

1.1. Description

Une *algèbre amassée* est une $\mathbb{Q}$-algèbre commutative munie d'un ensemble de générateurs distingués (les *variables d'amas*) regroupés dans des parties (les *amas*) de cardinal constant (le *rang*) qui sont construites récursivement par *mutation* à partir d'un *amas initial*. L'ensemble des variables d'amas peut être fini ou infini.

THÉORÈME 1.1 ([**39**]). — *Les algèbres amassées n'ayant qu'un nombre fini de variables d'amas sont paramétrées par les systèmes de racines finis.*

La classification est donc analogue à celle des algèbres de Lie semi-simples complexes. Nous allons préciser le théorème (dans le cas simplement lacé) à la section 2.

1.2. Premier exemple

Pour illustrer la description et le théorème, présentons [**106**] l'algèbre amassée $\mathscr{A}_{A_2}$ associée au système de racines A_2. Par définition, elle est engendrée sur $\mathbb{Q}$ par les variables d'amas x_m, $m \in \mathbb{Z}$, soumises aux *relations d'échange*

$$x_{m-1}x_{m+1} = 1 + x_m \ , \ m \in \mathbb{Z}.$$

Ses amas sont par définition les paires de variables consécutives $\{x_m, x_{m+1}\}$, $m \in \mathbb{Z}$. L'amas initial est $\{x_1, x_2\}$ et deux amas sont reliés par une mutation si et seulement si ils ont exactement une variable d'amas en commun.

Les relations d'échange permettent d'exprimer toute variable d'amas comme fonction rationnelle des variables initiales x_1, x_2 et donc d'identifier l'algèbre $\mathscr{A}_{A_2}$ à une sous-algèbre du corps $\mathbb{Q}(x_1, x_2)$. Afin d'expliciter cette sous-algèbre, calculons les x_m pour $m \geq 3$. Nous avons :

$$x_3 = \frac{1+x_2}{x_1} \tag{1.2.1}$$

$$x_4 = \frac{1+x_3}{x_2} = \frac{x_1+1+x_2}{x_1x_2} \tag{1.2.2}$$

$$x_5 = \frac{1+x_4}{x_3} = \frac{x_1x_2+x_1+1+x_2}{x_1x_2} \div \frac{1+x_2}{x_1} = \frac{1+x_1}{x_2}\,. \tag{1.2.3}$$

Notons que, contrairement à ce qu'on pourrait attendre, le dénominateur dans 1.2.3 reste un monôme ! En fait, toute variable d'amas dans une algèbre amassée quelconque est un polynôme de Laurent, voir le théorème 2.1. Continuons le calcul :

$$x_6 = \frac{1+x_5}{x_4} = \frac{x_2+1+x_1}{x_2} \div \frac{x_1+1+x_2}{x_1x_2} = x_1 \tag{1.2.4}$$

$$x_7 = (1+x_1) \div \frac{1+x_1}{x_2} = x_2. \tag{1.2.5}$$

Il est alors clair que la suite des x_m, $m \in \mathbb{Z}$, est 5-périodique et que le nombre de variables d'amas est effectivement fini et égal à cinq. Outre les deux variables initiales x_1 et x_2 nous avons trois variables non initiales x_3, x_4 et x_5. En examinant leurs dénominateurs, nous voyons qu'elles sont en bijection naturelle avec les racines positives α_1, $\alpha_1 + \alpha_2$, α_2 du système de racines de type A_2. Ceci se généralise à tout diagramme de Dynkin, voir le théorème 2.1.

1.3. Algèbres amassées de rang 2

À tout couple d'entiers positifs (b, c) est associée une algèbre amassée $\mathscr{A}_{(b,c)}$. On la définit de la même manière que $\mathscr{A}_{A_2}$, mais en remplaçant les relations d'échange par

$$x_{m-1}x_{m+1} = \begin{cases} x_m^b + 1 & \text{si } m \text{ est impair,} \\ x_m^c + 1 & \text{si } m \text{ est pair.} \end{cases}$$

L'algèbre $\mathscr{A}_{(b,c)}$ n'a qu'un nombre fini de variables d'amas si et seulement si $bc \leq 3$, autrement dit si la matrice

$$\begin{bmatrix} 2 & -b \\ -c & 2 \end{bmatrix}$$

est la matrice de Cartan d'un système de racines Φ de rang 2. Le lecteur pourra s'amuser à vérifier que, dans ce cas, les variables d'amas non initiales sont toujours paramétrées par les racines positives de Φ.

2. ALGÈBRES AMASSÉES ASSOCIÉES AUX CARQUOIS

2.1. Mutation des carquois

Un *carquois* est un graphe orienté, c'est-à-dire un quadruplet $Q = (Q_0, Q_1, s, t)$ formé d'un ensemble de sommets Q_0, d'un ensemble de flèches Q_1 et de deux applications s et t de Q_1 dans Q_0 qui, à une flèche α, associent respectivement sa source et son but. En pratique, on représente un carquois par un dessin comme dans l'exemple qui suit :

$$
\begin{tikzcd}
Q: & & 3 \arrow[dl, "\lambda"'] & & 5 \arrow[loop left, "\alpha"] \arrow[r, shift left=2] \arrow[r] \arrow[r, shift right=2] & 6 \\
& 1 \arrow[rr, "\nu"'] & & 2 \arrow[ul, "\mu"'] \arrow[r, shift left, "\beta"] & 4. \arrow[l, shift left, "\gamma"]
\end{tikzcd}
$$

Une flèche α dont la source et le but coïncident est une *boucle* ; un 2-*cycle* est un couple de flèches distinctes β et γ telles que $s(\beta) = t(\gamma)$ et $t(\beta) = s(\gamma)$. De même, on définit les n-cycles pour tout entier positif n. Un sommet i d'un carquois est une *source* (respectivement un *puits*) s'il n'existe aucune flèche de but i (respectivement de source i).

Appelons *bon carquois* un carquois fini sans boucles ni 2-cycles dont l'ensemble des sommets est l'ensemble des entiers $1 \ldots n$ pour un entier positif n. À un isomorphisme fixant les sommets près, un tel carquois Q est donné par la matrice antisymétrique $B = B_Q$ dont le coefficient b_{ij} est la différence entre le nombre de flèches de i à j et le nombre de flèches de j à i pour tous $1 \leq i, j \leq n$. Réciproquement, toute matrice antisymétrique B à coefficients entiers provient d'un bon carquois Q_B.

Soient Q un bon carquois et k un sommet de Q. La *carquois muté* $\mu_k(Q)$ est le carquois obtenu à partir de Q comme suit :

(1) pour tout sous-carquois $i \xrightarrow{\beta} k \xrightarrow{\alpha} j$, on rajoute une nouvelle flèche $[\alpha\beta] : i \to j$;
(2) on renverse toutes les flèches de source ou de but k ;
(3) on supprime les flèches d'un ensemble maximal de 2-cycles disjoints deux à deux.

Si B est la matrice antisymétrique associée à Q et B' celle associée à $\mu_k(Q)$, on a

$$
b'_{ij} = \begin{cases} -b_{ij} & \text{si } i = k \text{ ou } j = k\,; \\ b_{ij} + \operatorname{sgn}(b_{ik}) \max(0, b_{ik} b_{kj}) & \text{sinon.} \end{cases}
$$

C'est la règle de *mutation des matrices* antisymétriques (plus généralement : antisymétrisables) introduite par Fomin-Zelevinsky dans [**38**], voir aussi [**42**].