339

ASTÉRISQUE

2011

SÉMINAIRE BOURBAKI
VOLUME 2009/2010
EXPOSÉS 1012-1026

(1017) *La correspondance de Langlands locale p-adique pour* $\mathrm{GL}_2(\mathbf{Q}_p)$

Laurent BERGER

SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE
Publié avec le concours du CENTRE NATIONAL DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

Séminaire BOURBAKI Mars 2010
62e année, 2009-2010, n° 1017, p. 157 à 180

LA CORRESPONDANCE DE LANGLANDS LOCALE p-ADIQUE POUR $\mathrm{GL}_2(\mathbf{Q}_p)$

par **Laurent BERGER**

INTRODUCTION

La correspondance de Langlands locale p-adique pour $\mathrm{GL}_2(\mathbf{Q}_p)$ est une bijection entre certaines représentations de dimension 2 de $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbf{Q}}_p/\mathbf{Q}_p)$ et certaines représentations de $\mathrm{GL}_2(\mathbf{Q}_p)$. Ces représentations sont à coefficients soit dans une extension finie de $\mathbf{F}_p$ (correspondance en caractéristique p), soit dans une extension finie de $\mathbf{Q}_p$ (correspondance p-adique).

Dans le cas de la correspondance en caractéristique p, on peut faire une liste des objets du côté $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbf{Q}}_p/\mathbf{Q}_p)$ ainsi que du côté $\mathrm{GL}_2(\mathbf{Q}_p)$ et cela permet de définir une bijection numérique dont la construction est donnée dans la section 1. Dans le cas de la correspondance p-adique, on commence par expliquer comment faire le tri dans les représentations de $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbf{Q}}_p/\mathbf{Q}_p)$ (théorie de Fontaine) et dans celles de $\mathrm{GL}_2(\mathbf{Q}_p)$ (représentations « admissibles » au sens de Schneider et Teitelbaum). Ensuite, on donne les premiers exemples de correspondance construits par Breuil, ce qui est l'objet de la section 2. C'est en étudiant ces exemples que Colmez a compris comment construire de manière fonctorielle cette correspondance, grâce à la théorie des (φ,Γ)-modules. Cette construction est donnée dans la section 3 pour les représentations « trianguli-lines ». La section 4 contient la construction générale, ainsi que quelques propriétés de cette correspondance

1. la compatibilité à la réduction modulo p,
2. le lien avec la correspondance de Langlands locale « classique ».

Dans la section 5, nous donnons quelques applications de la correspondance, dont

1. le calcul de la réduction modulo p des représentations cristallines,
2. la démonstration de (nombreux cas de) la conjecture de Fontaine-Mazur.

Ce texte ne dit pas grand chose sur la motivation de ces constructions. Outre la compatibilité avec la correspondance de Langlands locale classique, une propriété très importante de la correspondance p-adique est sa réalisation dans la cohomologie complétée des tours de courbes modulaires (travaux en cours de rédaction). Enfin, l'extension de ces constructions à d'autres groupes que $\mathrm{GL}_2(\mathbf{Q}_p)$ est particulièrement délicate et fait l'objet de nombreux travaux en cours dont il serait prématuré de parler (voir [**11**]).

Notations

Dans tout ce texte, E désigne une extension finie de $\mathbf{Q}_p$ dont on note $\mathscr{O}_E$ l'anneau des entiers, $\mathfrak{m}_E$ l'idéal maximal de $\mathscr{O}_E$ et k_E son corps résiduel. Les corps E et k_E sont les corps des coefficients des représentations que l'on considère.

La théorie du corps de classes local fournit une application $\mathbf{Q}_p^\times \to \mathrm{Gal}(\overline{\mathbf{Q}}_p/\mathbf{Q}_p)^{\mathrm{ab}}$ dont l'image est dense et que l'on normalise en décidant que l'image de p est le frobenius géométrique. Cette application nous permet de considérer les caractères de $\mathbf{Q}_p^\times$ à valeurs dans $E^\times$ ou $k_E^\times$ comme des caractères de $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbf{Q}}_p/\mathbf{Q}_p)^{\mathrm{ab}}$. On note μ_λ le caractère de $\mathbf{Q}_p^\times$ qui est non-ramifié (c'est-à-dire trivial sur $\mathbf{Z}_p^\times$) et qui envoie p sur λ et on note $|\cdot|$ le caractère $x \mapsto p^{-\mathrm{val}_p(x)}$ où $\mathrm{val}_p(p) = 1$.

1. REPRÉSENTATIONS EN CARACTÉRISTIQUE p

Dans cette section, nous donnons la classification des représentations de $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbf{Q}}_p/\mathbf{Q}_p)$ et de $\mathrm{GL}_2(\mathbf{Q}_p)$ en caractéristique p, afin de définir la correspondance dans ce cas.

1.1. Représentations de $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbf{Q}}_p/\mathbf{Q}_p)$

Soit $\mathbf{Q}_p^{\mathrm{nr}}$ l'extension maximale non-ramifiée de $\mathbf{Q}_p$ de telle sorte que $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbf{Q}}_p/\mathbf{Q}_p^{\mathrm{nr}})$ est le sous-groupe d'inertie $\mathscr{I}_{\mathbf{Q}_p}$ de $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbf{Q}}_p/\mathbf{Q}_p)$. Si $n \geqslant 1$ et $d = p^n - 1$, alors $\mathbf{Q}_p^{\mathrm{nr}}(p^{1/d})$ est une extension modérément ramifiée de $\mathbf{Q}_p^{\mathrm{nr}}$ et l'application $g \mapsto g(p^{1/d})/(p^{1/d})$ définit par réduction modulo p un caractère $\omega_n : \mathscr{I}_{\mathbf{Q}_p} \to \mathbf{F}_{p^n}^\times$ (c'est le caractère « de niveau n » θ_{p^n-1} du §1.7 de [**45**]). Par exemple, ω_1 est la restriction à $\mathscr{I}_{\mathbf{Q}_p}$ de ω, la réduction modulo p du caractère cyclotomique.

Si $h \in \mathbf{Z}$, alors il existe une unique représentation semi-simple notée $\mathrm{ind}(\omega_n^h)$, de déterminant ω^h et de restriction à $\mathscr{I}_{\mathbf{Q}_p}$, isomorphe à $\omega_n^h \oplus \omega_n^{ph} \oplus \cdots \oplus \omega_n^{p^{n-1}h}$. La représentation $\mathrm{ind}(\omega_n^h)$ est alors $\mathbf{F}_p$-linéaire. Si $\chi : \mathrm{Gal}(\overline{\mathbf{Q}}_p/\mathbf{Q}_p) \to k_E^\times$ est un caractère, alors on note $\rho(r,\chi)$ la représentation $\mathrm{ind}(\omega_2^{r+1}) \otimes \chi$ qui est absolument irréductible si $r \in \{0,\ldots,p-1\}$.

Théorème 1.1. — *Toute représentation k_E-linéaire absolument irréductible de dimension* 2 *de* $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbf{Q}}_p/\mathbf{Q}_p)$ *est isomorphe à* $\rho(r,\chi)$ *pour un* $r \in \{0,\ldots,p-1\}$.

Toute représentation k_E-linéaire semi-simple de dimension 2 de $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbf{Q}}_p/\mathbf{Q}_p)$ est donc isomorphe (après extension éventuelle des scalaires) à $\rho(r,\chi)$ ou bien à $\omega^r\mu_\lambda \oplus \omega^s\mu_\nu$.

1.2. Représentations de $\mathrm{GL}_2(\mathbf{Q}_p)$

Nous donnons à présent la classification des représentations k_E-linéaires *lisses* (c'est-à-dire localement constantes) et absolument irréductibles de $\mathrm{GL}_2(\mathbf{Q}_p)$ qui admettent un caractère central. On identifie le centre de $\mathrm{GL}_2(\mathbf{Q}_p)$ à $\mathbf{Q}_p^\times$. Si $r \geqslant 0$, alors $\mathrm{Sym}^r k_E^2$ est une représentation de $\mathrm{GL}_2(\mathbf{F}_p)$ qui fournit par inflation une représentation de $\mathrm{GL}_2(\mathbf{Z}_p)$, et on l'étend à $\mathrm{GL}_2(\mathbf{Z}_p)\mathbf{Q}_p^\times$ en faisant agir p par l'identité. La représentation

$$\mathrm{ind}_{\mathrm{GL}_2(\mathbf{Z}_p)\mathbf{Q}_p^\times}^{\mathrm{GL}_2(\mathbf{Q}_p)} \mathrm{Sym}^r k_E^2$$

est l'ensemble des fonctions $f : \mathrm{GL}_2(\mathbf{Q}_p) \to \mathrm{Sym}^r k_E^2$ qui sont localement constantes, à support compact modulo $\mathrm{GL}_2(\mathbf{Z}_p)\mathbf{Q}_p^\times$ et telles que $f(kg) = \mathrm{Sym}^r(k)f(g)$ si $k \in \mathrm{GL}_2(\mathbf{Z}_p)\mathbf{Q}_p^\times$ et $g \in \mathrm{GL}_2(\mathbf{Q}_p)$. Cet espace est muni de l'action de $\mathrm{GL}_2(\mathbf{Q}_p)$ donnée par $(gf)(h) = f(hg)$. L'algèbre de Hecke

$$\mathrm{End}_{k_E[\mathrm{GL}_2(\mathbf{Q}_p)]}\left(\mathrm{ind}_{\mathrm{GL}_2(\mathbf{Z}_p)\mathbf{Q}_p^\times}^{\mathrm{GL}_2(\mathbf{Q}_p)} \mathrm{Sym}^r k_E^2\right)$$

se calcule à partir de la décomposition de $\mathrm{GL}_2(\mathbf{Z}_p)\mathbf{Q}_p^\times\backslash\mathrm{GL}_2(\mathbf{Q}_p)/\mathrm{GL}_2(\mathbf{Z}_p)\mathbf{Q}_p^\times$ et on peut montrer qu'elle est isomorphe à $k_E[T]$, où T correspond à la double classe $\mathrm{GL}_2(\mathbf{Z}_p)\mathbf{Q}_p^\times \cdot \left(\begin{smallmatrix} p & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right) \cdot \mathrm{GL}_2(\mathbf{Z}_p)$.

Si $\chi : \mathbf{Q}_p^\times \to k_E^\times$ est un caractère lisse et si $\lambda \in k_E$, alors on pose

$$\pi(r,\lambda,\chi) = \frac{\mathrm{ind}_{\mathrm{GL}_2(\mathbf{Z}_p)\mathbf{Q}_p^\times}^{\mathrm{GL}_2(\mathbf{Q}_p)} \mathrm{Sym}^r k_E^2}{T-\lambda} \otimes (\chi \circ \det).$$

C'est une représentation lisse de $\mathrm{GL}_2(\mathbf{Q}_p)$, de caractère central $\omega^r\chi^2$.

Théorème 1.2. — *Si* $r \in \{0,\ldots,p-1\}$ *et si* $(r,\lambda) \notin \{(0,\pm 1),(p-1,\pm 1)\}$, *alors la représentation* $\pi(r,\lambda,\chi)$ *est irréductible.*

Si $\lambda = \pm 1$, *alors on a deux suites exactes :*

$$0 \to \mathrm{Sp} \otimes (\chi\mu_\lambda \circ \det) \to \pi(0,\lambda,\chi) \to \chi\mu_\lambda \circ \det \to 0,$$

$$0 \to \chi\mu_\lambda \circ \det \to \pi(p-1,\lambda,\chi) \to \mathrm{Sp} \otimes (\chi\mu_\lambda \circ \det) \to 0,$$

où la représentation Sp *(la* spéciale*) ainsi définie est irréductible.*

Ce théorème est la réunion des résultats de [**2**] et [**1**] qui traitent le cas $\lambda \neq 0$ et des résultats de [**8**] qui traite le cas $\lambda = 0$ (les représentations dites *supersingulières*).

THÉORÈME 1.3. — *Les représentations k_E-linéaires lisses absolument irréductibles de* $\mathrm{GL}_2(\mathbf{Q}_p)$ *admettant un caractère central sont les suivantes :*

1. $\chi \circ \det$;
2. $\mathrm{Sp} \otimes (\chi \circ \det)$;
3. $\pi(r, \lambda, \chi)$ *où* $r \in \{0, \ldots, p-1\}$ *et* $(r, \lambda) \notin \{(0, \pm 1), (p-1, \pm 1)\}$.

Ce théorème est démontré dans **[2]**, **[1]** et **[8]**. On constate alors que toutes les représentations lisses irréductibles de $\mathrm{GL}_2(\mathbf{Q}_p)$ admettant un caractère central sont *admissibles*, c'est-à-dire que si K est un sous-groupe ouvert compact de $\mathrm{GL}_2(\mathbf{Q}_p)$, alors l'espace des vecteurs fixes par K est de dimension finie.

Il existe une autre manière de construire des représentations lisses de $\mathrm{GL}_2(\mathbf{Q}_p)$, en utilisant l'induction parabolique. On note $\mathrm{B}_2(\mathbf{Q}_p)$ l'ensemble des matrices triangulaires supérieures de $\mathrm{GL}_2(\mathbf{Q}_p)$. Si δ_1 et δ_2 sont deux caractères lisses de $\mathbf{Q}_p^\times$, alors on note $\delta_1 \otimes \delta_2$ le caractère de $\mathrm{B}_2(\mathbf{Q}_p)$ défini par $\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ 0 & d \end{smallmatrix}\right) \mapsto \delta_1(a)\delta_2(d)$. La représentation

$$B(\delta_1, \delta_2) = \mathrm{ind}_{\mathrm{B}_2(\mathbf{Q}_p)}^{\mathrm{GL}_2(\mathbf{Q}_p)}(\delta_1 \otimes \omega^{-1}\delta_2)$$

est l'ensemble des fonctions $f : \mathrm{GL}_2(\mathbf{Q}_p) \to k_E$ localement constantes et telles que $f(bg) = (\delta_1 \otimes \omega^{-1}\delta_2)(b) f(g)$ si $b \in \mathrm{B}_2(\mathbf{Z}_p)$ et $g \in \mathrm{GL}_2(\mathbf{Q}_p)$. Cet espace est muni de l'action de $\mathrm{GL}_2(\mathbf{Q}_p)$ donnée par $(gf)(h) = f(hg)$. On n'obtient pas de nouvelles représentations, comme le précise le résultat suivant.

THÉORÈME 1.4. — *Si* $\lambda \in k_E^\times$ *et* $r \in \{0, \ldots, p-1\}$, *alors les semi-simplifiées des représentations* $B(\chi\mu_{1/\lambda}, \chi\omega^{r+1}\mu_\lambda)$ *et* $\pi(r, \lambda, \chi)$ *sont isomorphes.*

Ces isomorphismes sont démontrés dans **[2]** et **[1]**.

Notons que la représentation $B(1, \omega)$ se réalise (via l'identification entre $\mathbf{P}^1(\mathbf{Q}_p)$ et $\mathrm{GL}_2(\mathbf{Q}_p)/\mathrm{B}_2(\mathbf{Q}_p)$) comme l'espace $\mathscr{C}^0(\mathbf{P}^1(\mathbf{Q}_p), k_E)$ des fonctions localement constantes sur $\mathbf{P}^1(\mathbf{Q}_p)$, muni de l'action naturelle de $\mathrm{GL}_2(\mathbf{Q}_p)$. On trouve donc par le théorème 1.2 que la spéciale s'identifie à $\mathrm{Sp} \simeq \mathscr{C}^0(\mathbf{P}^1(\mathbf{Q}_p), k_E)/\{\text{constantes}\}$.

1.3. La correspondance semi-simple modulo p

Toute représentation k_E-linéaire semi-simple de dimension 2 de $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbf{Q}}_p/\mathbf{Q}_p)$ est (après extension éventuelle des scalaires), soit absolument irréductible et donc de la forme $\rho(r, \chi)$ par le théorème 1.1, soit une somme de deux caractères et de la forme $(\omega^{r+1}\mu_\lambda \oplus \mu_{1/\lambda}) \otimes \chi$ avec $\lambda \in k_E^\times$ et $r \in \{0, \ldots, p-2\}$.

La correspondance entre représentations k_E-linéaires semi-simples de dimension 2 de $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbf{Q}}_p/\mathbf{Q}_p)$ et représentations k_E-linéaires semi-simples lisses de $\mathrm{GL}_2(\mathbf{Q}_p)$, est