339

ASTÉRISQUE

2011

SÉMINAIRE BOURBAKI
VOLUME 2009/2010
EXPOSÉS 1012-1026

(1019) *Grandes matrices aléatoires et théorèmes d'universalité*

Alice GUIONNET

SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE

Publié avec le concours du CENTRE NATIONAL DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

Séminaire BOURBAKI Mars 2010
62e année, 2009-2010, n° 1019, p. 203 à 237

GRANDES MATRICES ALÉATOIRES ET THÉORÈMES D'UNIVERSALITÉ [d'après Erdős, Schlein, Tao, Vu et Yau]

par **Alice GUIONNET**

INTRODUCTION

Les grandes matrices aléatoires sont tout d'abord apparues en statistique dans les travaux de Wishart [**37**] pour décrire des tableaux de données aléatoires, puis en physique dans les travaux de Wigner [**36**] et Dyson pour approximer un opérateur modélisant le Hamiltonien d'un noyau excité. Montgomery, soutenu par les simulations d'Odlyzko, a conjecturé que leurs valeurs propres étaient également reliées aux fameux zéros de la fonction de Riemann sur la droite critique, les espacements de ceux-ci loin de l'axe réel étant distribués de façon identique. Les matrices aléatoires sont depuis intervenues dans de nombreux contextes, et leur spectre a attiré un intérêt grandissant. On a notamment étudié sa convergence globale, la distribution des espacements des valeurs propres à l'intérieur du spectre et les fluctuations des valeurs propres extrêmes, quand la taille des matrices tend vers l'infini. Le cas de matrices aléatoires à coefficients gaussiens s'est révélé plus facile à appréhender, compte tenu de formules explicites pour la loi jointe des valeurs propres. Néanmoins, comme pour le théorème central limite, il est attendu que ces théorèmes limites sont universels et ne dépendent que très peu de la nature des coefficients. Le but de cet exposé est de montrer les récents efforts fournis pour étudier cette universalité. Nous considérerons les matrices dites de Wigner qui sont hermitiennes et avec des coefficients indépendants et équidistribués (modulo l'hypothèse de symétrie). Plus précisément, on notera $\mathbf{X}_N$ une matrice hermitienne $N \times N$ dont les coefficients $(X_{ij})_{1\le i<j\le N}$ (resp. $(X_{ii})_{1\le i\le N}$) sont indépendants et de loi ν (resp. μ) sur $\mathbb{C}$ (resp. $\mathbb{R}$) et on étudiera les valeurs propres $(\lambda_1, \ldots, \lambda_N) \in \mathbb{R}^N$ de cette matrice. Nous supposerons que ν et μ sont centrées et telles que $\int |x|^2 d\nu(x) = \int x^2 d\mu(x) = 1$. Dans ce cas il est connu depuis les travaux de Wigner dans les années cinquante que le nombre moyen de valeurs propres de

$\mathbf{Y}_N = N^{-\frac{1}{2}}\mathbf{X}_N$ tombant dans un intervalle $[a,b]$ de la droite réelle est de l'ordre de $N\sigma([a,b])$ où σ est la loi semi-circulaire ;

(1)
$$\lim_{N\to\infty} \frac{1}{N}\sharp\{i : N^{-\frac{1}{2}}\lambda_i \in [a,b]\} = \sigma([a,b]) = \int_a^b \rho_{sc}(x)dx := \int_{[a\vee -2, b\wedge 2]} \sqrt{4-x^2}\frac{dx}{2\pi} \quad \text{p.s.}$$

L'étude des propriétés locales du spectre s'est avérée beaucoup plus complexe et n'a été entreprise que très récemment dans une certaine généralité sur les distributions μ et ν des coefficients. Nous discuterons tout particulièrement le résultat suivant. Supposons que μ et ν ont des queues de distributions sous-exponentielles, dans le sens où il existe des constantes $C, C' > 0$ telles que, pour tout $t > C$

$$\nu\left(|z| > t^{C'}\right) \le e^{-t} \qquad \mu\left(|z| > t^{C'}\right) \le e^{-t}. \tag{2}$$

Si ν est une mesure sur $\mathbb{C}$, nous supposerons que les lois de la partie imaginaire et de la partie réelle sont indépendantes, et, si ν est une mesure sur la droite réelle, que $\int x^3 d\nu(x)$ s'annule ou que ν a au moins trois points dans son support. Nous distinguerons ces deux cas par un paramètre β qui sera égal à deux (resp. un) si le support est dans $\mathbb{C}$ (resp. $\mathbb{R}$).

THÉORÈME 0.1. — *Soit B un intervalle compact de $\mathbb{R}$ et $x \in (-2,2)$.*

La probabilité qu'aucune valeur propre de $\mathbf{X}_N$ ne tombe dans un intervalle $N^{\frac{1}{2}}x + N^{-\frac{1}{2}}\rho_{sc}(x)^{-1}B$ converge quand la dimension N tend vers l'infini vers une limite non triviale qui ne dépend que de β et de B (voir la description de cette limite en (11) *dans le cas où $\beta = 2$).*

La probabilité qu'aucune valeur propre de $\mathbf{X}_N$ ne tombe dans l'ensemble $2N^{\frac{1}{2}} + N^{-\frac{1}{6}}B$ converge quand la dimension N tend vers l'infini vers une limite non triviale qui ne dépend que de β et de B (voir (12) *dans le cas où $\beta = 2$).*

Le second résultat décrit les fluctuations des valeurs propres de $\mathbf{Y}_N$ au bord du spectre (proche de 2), qui sont d'ordre $N^{-\frac{2}{3}}$, alors que le premier concerne celles des valeurs propres à l'intérieur du spectre, qui sont beaucoup plus petites, d'ordre N^{-1}. Ce dernier point permet d'étudier la convergence de la loi des espacements des valeurs propres à l'intérieur du spectre ; on a par exemple le résultat suivant (voir [**24**, p.84] et [**1**, Theorem 4.2.49] avec [**7**] pour le cas gaussien et [**10**, Theorem 3] pour le cas général) dans le cas où ν est une mesure sur $\mathbb{C}$.

THÉORÈME 0.2. — *Pour tout $x \in (-2,2)$, toute fonction l_N tendant vers l'infini plus lentement que N, le nombre moyen de valeurs propres de $\mathbf{Y}_N$ à distance inférieure à $l_N/N\rho_{sc}(x)$ de x et dont les espacements sont plus petits que $s/\rho_{sc}(x)N$ est approximativement égal à $P_{\mathrm{Gaudin}}([0,s])l_N$, où P_{Gaudin} est la distribution de Gaudin.*

Le second point du théorème 0.1 donne les fluctuations de la plus grande valeur propre.

THÉORÈME 0.3. — *Pour tout $t \in \mathbb{R}$, la plus grande valeur propre λ_1 de $\mathbf{X}_N$ est telle que*

$$\lim_{N\to\infty} P\left(N^{\frac{2}{3}}(\frac{\lambda_1}{\sqrt{N}}-2)\leq t\right)=F_\beta(t)$$

avec F_β la fonction de répartition de la loi de Tracy-Widom.

Ces théorèmes ont été démontrés pour des matrices gaussiennes depuis une quinzaine d'années, notamment après les travaux de M. Mehta [**24**], P. Forrester [**17**] et C. Tracy et H. Widom [**33, 34**], grâce à la formule explicite de la loi jointe des valeurs propres et sa propriété de loi déterminantale. Les premiers pas vers l'universalité ont été franchis par K. Johansson [**21**] qui a considéré des matrices obtenues comme somme d'une matrice gaussienne et d'une matrice de Wigner plus générale, de nouveau grâce à une structure déterminantale de la loi jointe des valeurs propres. Dans ce dernier cas, il est primordial de supposer que les coefficients sont complexes hors de la diagonale (cas hermitien). L'universalité des fluctuations au bord du spectre a été démontrée par des techniques de moments et de combinatoire par A. Soshnikov. Cette approche ne pouvant permettre d'analyser les espacements des valeurs propres à l'intérieur du spectre, il a fallu attendre l'été dernier pour que cette question soit enfin résolue par deux équipes indépendantes, d'une part L. Erdős, B. Schlein et H.T. Yau et leurs collaborateurs, et d'autre part T. Tao et V. Vu. Les approches de ces deux équipes, quoique différentes, reposent sur des raisonnements beaucoup plus probabilistes et montrent une sorte de régularité des espacements des valeurs propres en fonction des coefficients de la matrice. Les travaux presque simultanés de T. Tao et V. Vu [**32**] et de L. Erdős, B. Schlein, S. Péché, J. Ramirez et H.T. Yau [**9**] ont permis d'étendre ces résultats d'une part sous la condition que les quatre premiers moments de ν et μ sont les mêmes que ceux de la gaussienne (ou plus généralement que ceux d'une matrice étudiée par K. Johansson [**21**]), et d'autre part, sous des conditions de régularité de la densité de ν et μ. Alliant ces résultats, L. Erdős, J. Ramirez, B. Schlein, T. Tao, V. Vu et H.T. Yau [**10**] ont pu démontrer l'universalité dans le cas hermitien sous des conditions de queues exponentielles seulement. Afin de pouvoir considérer des ensembles plus généraux, et en particulier les matrices à coefficients réels (cas symétrique), L. Erdős, B. Schlein et H.T. Yau [**14**] ont introduit une approche dynamique qui permet de largement généraliser les résultats de K. Johansson [**21**] sans utiliser de formule explicite ou de structure déterminantale. Ce point de vue a été étendu dans les travaux récents de L. Erdős, H.T. Yau et Y. Yin [**15, 16**] pour étudier les matrices de Wishart et à bande, et réduire considérablement les hypothèses sur les troisième et quatrième moments. L'universalité est attendue à l'intérieur (resp. au bord) du spectre seulement sous une condition de second (resp. quatrième) moment fini, voir **[22]** pour ce résultat dans le cas de coefficients complexes ayant une composante gaussienne. Le but de ces notes est de présenter les idées des preuves de ces différents résultats, en précisant particulièrement celles des travaux de L. Erdős, B. Schlein et H.T. Yau et T. Tao et V. Vu. Nous évoquerons également leurs liens avec les propriétés de délocalisation des vecteurs propres de X_N. Nous ne parlerons pas des diverses généralisations à d'autres ensembles de matrices tels que les matrices de Wishart **[25]**, **[31]** et **[15]** ou les matrices à bande généralisées **[16]**. Par ailleurs, les résultats que nous développerons concernent la situation de coefficients indépendants, totalement différente par exemple de celle rencontrée pour les modèles de matrices avec un potentiel non quadratique pour laquelle nous renvoyons le lecteur à **[6]**. Un des problèmes qui semble encore ouvert pour des matrices à coefficients indépendants concerne le cas de matrices à bande dont les coefficients sont nuls en dehors d'une bande de largeur W bien plus petite que N. Il est attendu que pour W bien plus grand que $\sqrt{N}$ les vecteurs propres sont délocalisés comme pour les matrices de Wigner, voir le corollaire 4.4, alors que pour $W \ll \sqrt{N}$, ils sont localisés. Cette transition serait un modèle simple de la transition d'Anderson.

1. MATRICES GAUSSIENNES ET LOIS DÉTERMINANTALES

Nous considérons dans cette section le cas de matrices de Wigner $\mathbf{G}_N$ dites du GUE (pour Gaussian Unitary Ensemble), c'est-à-dire les matrices $\mathbf{X}_N$ telles que ν (resp. μ) est une mesure gaussienne standard sur $\mathbb{C}$ (resp. $\mathbb{R}$) ; pour toute fonction test f

(3)
$$\int f(x)d\mu(x) = \int_{\mathbb{R}} f(x)\frac{dxe^{-\frac{x^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}} \quad \text{et} \quad \int f(z)d\nu(z) = \int f(\frac{x+iy}{\sqrt{2}})d\mu(x)d\mu(y)\,.$$

Comme nous allons le voir, la particularité de ces matrices est que la loi jointe de leurs valeurs propres est explicite et est une loi déterminantale. Cette structure très particulière, que nous allons bientôt décrire, permet une analyse relativement aisée des propriétés locales du spectre.

Il n'est pas difficile de constater que la loi de la matrice $\mathbf{G}_N$ est laissée invariante par la conjugaison $U\mathbf{G}_NU^*$ par une matrice unitaire, et par conséquent que les valeurs propres $D^N = (\lambda_1, \ldots, \lambda_N)$ de $\mathbf{G}_N$ sont indépendantes de ses vecteurs propres, dont la matrice V^N suit la mesure uniforme sur le groupe unitaire. En calculant le Jacobien du changement de coordonnés qui à $\mathbf{G}_N$ associe D^N et une paramétrisation de V^N,