339

ASTÉRISQUE

2011

SÉMINAIRE BOURBAKI
VOLUME 2009/2010
EXPOSÉS 1012-1026

(1020) *La classification des groupes p-compacts*

Bob OLIVER

SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE
Publié avec le concours du CENTRE NATIONAL DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

Séminaire BOURBAKI Mars 2010
62^{e} année, 2009-2010, n^{o} 1020, p. 239 à 257

LA CLASSIFICATION DES GROUPES p-COMPACTS [d'après Andersen, Grodal, Møller, et Viruel]

par **Bob OLIVER**

INTRODUCTION

À chaque groupe topologique G on associe un classifiant BG, originellement construit par Milnor, dont l'une des propriétés est que son espace de lacets ΩBG a le type d'homotopie de G. Réciproquement, pour tout espace Y, l'espace de lacets ΩY admet une multiplication (composition des lacets) qui vérifie à homotopie près les axiomes de groupe.

Un *espace de lacets finis* est un complexe cellulaire X fini auquel on peut associer un « classifiant » BX : un espace topologique dont l'espace de lacets $\Omega(BX)$ a le type d'homotopie de X. Le prototype d'un espace de lacets fini est un groupe de Lie compact G, auquel on associe son classifiant BG dans le sens de Milnor. D'autres exemples ont été construits dans les années 60 (voir par exemple [**26**]), mais ils avaient tous la propriété que, pour tout nombre premier p, la cohomologie mod p de l'espace était isomorphe à la cohomologie mod p d'un groupe de Lie compact.

La résolution de la conjecture de Sullivan, et surtout les travaux de Lannes [**17**], ont permis d'étudier ces espaces de manière plus approfondie. Dwyer et Wilkerson [**11**] ont eu l'idée de regarder des versions locales des espaces de lacets finis, et d'y associer des structures déjà connues pour les groupes de Lie compacts. Pour un nombre premier p fixé, ils ont défini un *groupe p-compact* comme un triplet (X, BX, i), où X et BX sont des espaces, la cohomologie de X modulo p est finie, BX est « p-complet », et i est une équivalence d'homotopie entre X et l'espace des lacets $\Omega(BX)$ sur BX. On considère BX comme « classifiant » de X. Deux groupes p-compacts (X, BX, i) et (Y, BY, j) sont *isomorphes* si BX et BY ont même type d'homotopie. Dwyer et Wilkerson ont démontré que ces objets admettent des tores maximaux et des groupes de Weyl d'une façon qui généralise ces structures dans le cas d'un groupe de Lie.

Une *pseudo-réflexion p-adique* est un automorphisme d'un $\mathbb{Z}_p$-module L libre de type fini qui agit par l'identité sur un sous-module de corang 1. Un *groupe de pseudo-réflexions p-adiques* est un couple (Γ, L), où L est un $\mathbb{Z}_p$-module libre de type fini et $\Gamma \leq \mathrm{Aut}(L)$ est un sous-groupe fini engendré par des pseudo-réflexions. Dwyer et Wilkerson ont démontré que le groupe de Weyl d'un groupe p-compact connexe (X, BX, i), avec son action sur l'homotopie de $BT_p^\wedge$ (le « p-complété » de BT), est un groupe de pseudo-réflexions p-adiques.

Depuis les travaux de Dwyer et Wilkerson, ces groupes de pseudo-réflexions p-adiques sont le point de départ pour toute tentative de classifier les groupes p-compacts. Le résultat principal sur lequel je vais rapporter ici, démontré par Andersen, Grodal, Møller et Viruel, est que pour un nombre premier p impair, cette correspondance est bijective : à tout groupe de pseudo-réflexions p-adiques on peut associer un groupe p-compact connexe, unique à isomorphisme près, dont le groupe de Weyl est le groupe donné. Quand $p = 2$, cette correspondance n'est pas bijective : les groupes SO(3) et $SU(2)$ donnent un contre-exemple. Mais dans ce cas aussi, Andersen et Grodal d'un côté, et Møller de l'autre, ont réussi à classifier les groupes 2-compacts connexes (et même les groupes p-compacts non connexes), en fonction des groupes de pseudo-réflexions 2-adiques munis de certaines structures supplémentaires.

La terminologie générale de Dwyer et Wilkerson pour étudier les groupes p-compacts est résumée en section 1. La classification des groupes de pseudo-réflexions p-adiques est expliquée en section 2. Les énoncés des principaux théorèmes de la classification sont présentés en section 3, et quelques éléments des démonstrations résumés en sections 4–6. Après, nous décrivons certaines applications en sections 7–8.

1. LA STRUCTURE DES GROUPES p-COMPACTS

Avant d'énoncer ces résultats de manière plus détaillée, il faut expliquer la terminologie.

Soient X et Y deux espaces topologiques. Notons $\mathrm{appl}(X, Y)$ l'espace de toutes les applications (continues) de X vers Y. Si $f\colon X \longrightarrow Y$ est une application, $\mathrm{appl}(X, Y)_f$ est l'espace des applications homotopes à f : la composante connexe dans $\mathrm{appl}(X, Y)$ qui contient f. Si X et Y sont munis de points de base $x_0 \in X$ et $y_0 \in Y$, une application $f\colon X \longrightarrow Y$ est *pointée* si $f(x_0) = y_0$. Notons $\mathrm{Aut}(X) \subseteq \mathrm{appl}(X, X)$ le monoïde topologique des équivalences d'homotopie $X \xrightarrow{\simeq} X$, et $\mathrm{Out}(X) = \pi_0(\mathrm{Aut}(X))$ le groupe des classes d'homotopie d'éléments de $\mathrm{Aut}(X)$.

Par la *p-complétion* $X_p^\wedge$ d'un espace X nous voulons toujours dire la complétion dans le sens de Bousfield et Kan. On dira qu'une application $f\colon X \longrightarrow Y$

est une *p-équivalence* si elle induit un isomorphisme en homologie mod p. Quand le groupe $\pi_1(X)$ est fini (fini dans chaque composante si X n'est pas connexe par arcs), l'application naturelle $X \xrightarrow{\iota_X} X^\wedge_p$ est universelle parmi toutes les p-équivalences $f\colon X \longrightarrow Y$. Plus précisément, pour toute p-équivalence $f\colon X \longrightarrow Y$ il existe $j\colon Y \longrightarrow X^\wedge_p$, unique à homotopie près, telle que $j \circ f \simeq \iota_X$. L'espace X est *p-complet* si ι_X est une équivalence d'homotopie. En général, une application continue $f\colon X \longrightarrow Y$ induit une équivalence $X^\wedge_p \xrightarrow{\simeq} Y^\wedge_p$ si et seulement si f est une p-équivalence.

Pour tout groupe p-compact X de classifiant BX, $\pi_1(BX) \cong \pi_0(X)$ est fini (puisque $H^*(X;\mathbb{F}_p)$ est finie par définition), et $\pi_1(BX)$ est donc un p-groupe puisque BX est p-complet. Le groupe des composantes connexes de X est donc toujours un p-groupe. Pour tout groupe de Lie compact G dont $\pi_0(G)$ est un p-groupe, $G^\wedge_p \simeq \Omega(BG^\wedge_p)$, et donc $G^\wedge_p$ est un groupe p-compact avec le classifiant $BG^\wedge_p$.

Un *groupe p-torique* est un groupe de Lie compact dont la composante connexe est un tore et le groupe des composantes un p-groupe. Si X est un groupe p-compact, et BX son classifiant, un *sous-groupe p-torique* de X est un couple (P, f) où P est un groupe p-torique et $f\colon BP \longrightarrow BX$ est une application pointée, qui est un « monomorphisme » dans le sens qu'il n'y a pas de p-sous-groupe $1 \neq Q \trianglelefteq P$ tel que f se factorise par $B(P/Q)$.

L'espace de toutes les applications $BP \longrightarrow BX$ homotopes à f est lui-même le classifiant d'un groupe p-compact, qu'on appelle le *centralisateur* de P dans X :

$$B\mathscr{C}_X(P, f) \overset{\text{déf}}{=} \operatorname{appl}(BP, BX)_f.$$

L'évaluation en un point de base de BP définit une application de $B\mathscr{C}_X(P, f)$ vers BX, qu'on considère comme l'inclusion du centralisateur dans X. Si G est un groupe de Lie connexe (ou tel que $\pi_0(G)$ est un p-groupe), et X est le groupe p-compact correspondant avec $BX = BG^\wedge_p$, alors pour tout sous-groupe p-torique $P \leq G$, $B\mathscr{C}_X(P) \cong BC_G(P)^\wedge_p$ (comme conséquence de la conjecture de Sullivan et des résultats de Lannes), et $\mathscr{C}_X(P)$ est donc le centralisateur de P dans le sens usuel.

Un tore maximal de X est un sous-groupe qui est un tore, et qui est maximal dans le sens usuel. Un des résultats principaux de **[11]** est que chaque groupe p-compact admet un tore maximal $f\colon BT^\wedge_p \longrightarrow BX$, unique à homotopie près, et que la composée

$$BT^\wedge_p \xrightarrow{\simeq} \operatorname{appl}(BT^\wedge_p, BT^\wedge_p)_{\mathrm{Id}} = B\mathscr{C}_{T^\wedge_p}(T) \xrightarrow{f\circ -} \operatorname{appl}(BT^\wedge_p, BX)_f = B\mathscr{C}_X(T)$$

est un revêtement fini à homotopie près. (Autrement dit, T est d'indice fini dans son centralisateur.)

Si T est un tore de rang n, le p-complété $BT^\wedge_p$ de BT est un espace d'Eilenberg-MacLane du type $K(\mathbb{Z}_p{}^n, 2)$: $\pi_2(BT^\wedge_p) \cong \mathbb{Z}_p{}^n$ et tous les autres groupes d'homotopie sont triviaux. Le groupe $\operatorname{Out}(BT^\wedge_p)$ de ses automorphismes à homotopie près est donc isomorphe à $\mathrm{GL}_n(\mathbb{Z}_p)$, et non à $\mathrm{Aut}(T) \cong \mathrm{GL}_n(\mathbb{Z})$. Si (T, f) est un tore maximal de X, le *groupe de Weyl* de X est le sous-groupe $W \leq \mathrm{Out}(BT^\wedge_p)$ de tous les $\alpha\colon BT^\wedge_p \xrightarrow{\simeq} BT^\wedge_p$ tels que $f \circ \alpha \simeq f$. Un des théorèmes principaux de Dwyer et Wilkerson [**11**, Theorem 9.7] est que, pour X connexe, W est fini et son action sur le $\mathbb{Z}_p$-module $L = \pi_2(BT^\wedge_p)$ est engendrée par des pseudo-réflexions : des éléments qui fixent un sous-module de corang 1 dans L.

Dans leur article [**11**], Dwyer et Wilkerson définissent aussi le *normalisateur* $\mathscr{N}$ du tore maximal (T, f) d'un groupe p-compact X. Le normalisateur admet un classifiant $B\mathscr{N}$ dont le revêtement universel est $BT^\wedge_p$, et tel que $\pi_1(B\mathscr{N})$ est le groupe de Weyl de X. On peut donc considérer $\mathscr{N}$ comme une extension du tore T par le groupe de Weyl. Quand X est le p-complété d'un groupe de Lie compact G, et T est un tore maximal de G, $B\mathscr{N}$ est un « p-complété partiel » de $BN_G(T)$ (on complète le revêtement universel mais pas le groupe fondamental). En général, $\mathscr{N}$ n'est pas un groupe p-compact puisque $\pi_0(\mathscr{N}) = \pi_1(B\mathscr{N})$ n'est pas un p-groupe, mais $\mathscr{N} \stackrel{\text{déf}}{=} \Omega(B\mathscr{N})$ est un espace de lacets fini.

Un sous-groupe p-torique (P, f) d'un groupe p-compact est *central* si son centralisateur $\mathscr{C}_X(P, f)$ est isomorphe à X en tant que groupe p-compact ; c'est-à-dire si l'inclusion $B\mathscr{C}_X(P, f) \longrightarrow BX$ est une équivalence d'homotopie. Par [**12**, Theorem 1.2], tout groupe p-compact X admet un sous-groupe central maximal (unique à homotopie près), qu'ils appellent le *centre* $Z(X)$ de X.

En général, quand X est un groupe p-compact, et BX est son classifiant, nous noterons T_X son tore maximal, $\mathscr{N}_X$ le normalisateur de T_X (en tant qu'espace de lacets fini), $L_X = \pi_2(B{T_X}^\wedge_p)$, et W_X le groupe de Weyl de X. En particulier, L_X est un $\mathbb{Z}_p$-module libre, et (W_X, L_X) est un groupe de pseudo-réflexions p-adiques. Toutes ces structures jouent un rôle central dans la classification des groupes p-compacts.

2. LA CLASSIFICATION DES GROUPES DE PSEUDO-RÉFLEXIONS

Un *groupe de pseudo-réflexions* sur un corps K est un couple (Γ, V), où Γ est un groupe fini, V est un K-espace vectoriel de dimension finie, et $\Gamma \leq \mathrm{Aut}_K(V)$ est un sous-groupe fini engendré par des pseudo-réflexions : des éléments qui laissent fixe un sous-espace de codimension 1 dans V. Un *groupe de pseudo-réflexions p-adiques* est un couple (Γ, L) où L est un $\mathbb{Z}_p[\Gamma]$-module de type fini sans torsion, et $(\Gamma, \mathbb{Q} \otimes_{\mathbb{Z}} L)$ est un groupe de pseudo-réflexions sur $\mathbb{Q}_p$.

Pour chaque nombre premier p, on souhaite classifier les groupes p-compacts connexes en les comparant avec la liste de tous les groupes de pseudo-réflexions