339 ASTÉRISQUE 2011

SÉMINAIRE BOURBAKI
VOLUME 2009/2010
EXPOSÉS 1012-1026

(1021) *Groupes algébriques pseudo-réductifs et applications*

Bertrand RÉMY

SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE
Publié avec le concours du CENTRE NATIONAL DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

Séminaire BOURBAKI — Mars 2010
62e année, 2009-2010, n° 1021, p. 259 à 304

GROUPES ALGÉBRIQUES PSEUDO-RÉDUCTIFS ET APPLICATIONS [d'après J. Tits et B. Conrad-O. Gabber-G. Prasad]

par **Bertrand RÉMY**

INTRODUCTION

Le thème général de ce rapport est la théorie des groupes algébriques. Plus précisément, il s'agit de rendre compte de l'étude, commencée par J. Tits et menée à bien par B. Conrad, O. Gabber et G. Prasad, d'une classe de groupes généralisant celle des groupes réductifs. La définition de cette classe est assez naturelle quand on connaît ces derniers ; pour cette raison, les groupes en question sont appelés *pseudo-réductifs*. Un corps de base étant donné, la classe des groupes pseudo-réductifs contient toujours celles des groupes réductifs connexes ; elle contient plus de groupes exactement quand le corps est non parfait. Une motivation pour travailler avec des groupes pseudo-réductifs sur des corps non parfaits est qu'élucider leur structure permet en retour un dévissage fin des groupes algébriques connexes généraux. Ce dévissage a par exemple permis à B. Conrad de prouver des résultats de finitude et de compacité pour les groupes algébriques sur les corps globaux de caractéristique positive et leurs complétions. Sur les corps de nombres, ces résultats avaient été démontrés dans les années 60 par A. Borel, J-P. Serre, Harish-Chandra, G. D. Mostow, T. Tamagawa... mais des énoncés généraux restaient non démontrés sur les corps de fonctions. Le travail imposant de B. Conrad, O. Gabber et G. Prasad culmine en une classification des groupes pseudo-réductifs : il existe un procédé presque universel qui permet de construire les groupes pseudo-réductifs au moyen des groupes réductifs, de certains groupes commutatifs et du procédé de restriction des scalaires. Cependant un autre intérêt important de la monographie à laquelle ce travail a donné lieu est que les auteurs reprennent les travaux d'A. Borel et de J. Tits sur la structure des groupes algébriques connexes (conjugaison, points rationnels, systèmes de racines). Des énoncés avaient été présentés par ces derniers à la fin des années 70. Ils avaient été démontrés dans les cours de J. Tits au début des années 90. Ils sont maintenant repris dans un cadre schématique, tout comme la jolie théorie des groupes unipotents écrite par J. Tits à la fin des années 60 et réinvestie par J. Oesterlé dans les années 80.

Revenons un peu plus en détail sur certains points.

Groupes algébriques réductifs

Un *groupe algébrique* est une variété algébrique (lisse) munie d'une structure de groupe dont la multiplication et le passage à l'inverse sont des applications régulières pour la structure algébrique en question. Les groupes considérés dans ces notes sont des groupes de matrices ; autrement dit, un groupe algébrique est ici un groupe algébrique linéaire.

On peut motiver certaines définitions de la théorie par analogie avec celle des algèbres. Une condition importante dans les deux cas est celle de *semi-simplicité* [**12**, VIII]. On peut caractériser les algèbres semi-simples, parmi toutes celles de dimension finie, par la trivialité du radical de Jacobson ; ce radical contient en outre tous les idéaux à gauche formés d'éléments nilpotents. Un des intérêts des algèbres semi-simples est la possibilité de décomposer leurs représentations linéaires en représentations matricielles diagonales par blocs, à blocs irréductibles.

Si l'on revient aux groupes et si on considère une représentation linéaire (de dimension finie) d'un groupe algébrique, celle-ci va pouvoir se mettre sous forme matricielle triangulaire supérieure, les blocs diagonaux correspondant à des sous-quotients irréductibles. Le noyau de l'action sur la somme directe des sous-quotients est un sous-groupe distingué et représenté par des matrices *unipotentes*, c'est-à-dire dont toutes valeurs propres valent 1. Si H est un groupe algébrique connexe (disons sur un corps parfait), son *radical unipotent* est son plus grand sous-groupe algébrique distingué, connexe et unipotent. On note $\mathscr{R}_u(\mathrm{H}_{\overline{k}})$ ce groupe et on dit que H est *réductif* si $\mathscr{R}_u(\mathrm{H}_{\overline{k}}) = \{1\}$. La classe des groupes réductifs est le bon cadre pour étudier les groupes classiques de matrices (groupes d'automorphismes de formes bilinéaires, sesquilinéaires et généralisations). C'est le travail fondamental de C. Chevalley [**16**] qui élucide la structure de ces groupes et qui fournit une classification sur un corps algébriquement clos qui ne dépend que de données combinatoires issues de la théorie de Lie. Dans le cas d'un corps de base quelconque, la structure et la classification des groupes réductifs ont été obtenues respectivement par A. Borel et J. Tits [**7**] et par J. Tits [**36**], dans le même esprit que précédemment (mais avec des énoncés devant prendre en compte le corps de base).

Corps de base non parfaits et groupes pseudo-réductifs

Les choses deviennent plus compliquées quand on prend en compte le corps de définition des sous-groupes d'un groupe algébrique, c'est-à-dire le plus petit corps contenant les coefficients polynomiaux d'équations définissant le sous-groupe considéré. Dans un de ses cours [**41**], J. Tits recense les principales mises en garde à avoir en mémoire quand on travaille avec un groupe algébrique connexe H défini sur un corps k non parfait :

1. l'adhérence de Zariski des points rationnels $\mathrm{H}(k)$ peut être un sous-groupe strictement inclus dans H ;
2. le groupe H peut n'admettre aucun sous-groupe algébrique non trivial qui soit unipotent, connexe, distingué et défini sur k, sans pour autant être réductif ;
3. certains éléments unipotents peuvent n'être contenus dans aucun sous-groupe unipotent *déployé*, c'est-à-dire admettant une suite de composition à sous-quotients isomorphes au groupe additif de k.

Les groupes *pseudo-réductifs* sont ceux qui sont mentionnés dans le deuxième point. Précisément pour H comme ci-dessus, le *radical unipotent rationnel* de H est son plus grand sous-groupe distingué, connexe, unipotent et défini sur k (1.1.1). On note $\mathscr{R}_{u,k}(\mathrm{H})$ ce groupe et on dit que H est *k-pseudo-réductif* si $\mathscr{R}_{u,k}(\mathrm{H}) = \{1\}$ (1.1.2). Le livre de B. Conrad, O. Gabber et G. Prasad [**18**] est principalement consacré à l'étude et à la classification de ces groupes. Ce qui motive cela est par exemple la suite exacte

$$1 \to \mathscr{R}_{u,k}(\mathrm{H}) \to \mathrm{H} \to \mathrm{H}/\mathscr{R}_{u,k}(\mathrm{H}) \to 1$$

qui suggère qu'une meilleure compréhension des groupes unipotents et pseudo-réductifs doit permettre de comprendre les groupes algébriques (connexes) en général. La seconde partie de ce rapport illustre le fait que tel est bien le cas, d'après [**18**] et [**17**].

Classification des groupes pseudo-réductifs

La classification dont il est question est en réalité la mise en évidence d'un procédé très général permettant de produire « presque tous » les groupes pseudo-réductifs, les groupes faisant exception étant définis seulement en caractéristique 2 et 3.

Voyons d'abord comment produire des groupes pseudo-réductifs non réductifs. Voici un moyen, qui demande à être raffiné pour être exhaustif. On part d'une extension finie purement inséparable non triviale K/k, par exemple $k = \mathbf{F}_q(t)$ (où q est une puissance de la caractéristique p) et $K = k(u)$ avec $u^p \in k$ mais $u \notin k$. On se donne un groupe réductif connexe non trivial G sur K, par exemple SL_n ou le groupe multiplicatif GL_1. Notons $\mathrm{R}_{K/k}(\mathrm{G})$ le groupe algébrique obtenu par restriction des scalaires, c'est-à-dire en choisissant une base du k-espace vectoriel K et en voyant G comme un groupe sur k via cette base. Alors le groupe $\mathrm{R}_{K/k}(\mathrm{G})$ est k-pseudo-réductif mais n'est pas réductif (1.2.2).

Le procédé dit *standard* de construction de groupes pseudo-réductifs est une élaboration assez sophistiquée sur le procédé précédent. Une des nouveautés est la possibilité de pratiquer une sorte de « chirurgie » consistant à remplacer un sous-groupe de Cartan par un sous-groupe commutatif plus général (pas n'importe lequel, cependant) au moyen d'un procédé de « poussé en avant non commutatif » (3.1.1). Voici une simplification du résultat de classification des groupes pseudo-réductifs (3.2.1).

Théorème. — *Tout groupe pseudo-réductif en caractéristique différente de* 2 *et* 3 *est standard, c'est-à-dire obtenu par le procédé de construction standard.*

Cet énoncé et ceux qui le précisent en petite caractéristique constituent le principal résultat du livre [**18**] de B. Conrad, O. Gabber et G. Prasad. Notons que le cas de caractéristique 3 est pour ainsi dire contrôlé (3.3.3) et qu'en caractéristique 2, sous l'hypothèse d'un corps de base k presque parfait (au sens où $[k : k^2] \leqslant 2$), on dispose d'une quantité importante d'informations (3.3.4).

Structure des groupes algébriques généraux

Une bonne partie de la théorie de Borel-Tits sur les groupes réductifs isotropes [**7**] peut être résumée *in fine* :

1. par des théorèmes de conjugaison (sur le corps de base) pour des classes de sous-groupes remarquables ;
2. par l'existence d'une structure combinatoire très particulière, les *systèmes de Tits*, dans les groupes de points rationnels correspondants ;
3. par le fait que la combinatoire ci-dessus peut être raffinée par l'existence d'une famille de sous-groupes indexée par un système de racines naturel dans le groupe.

Les classes de groupes du point 1 sont notamment celles des tores déployés maximaux et des sous-groupes paraboliques minimaux (un sous-groupe est dit *parabolique* si le quotient du groupe ambiant qui lui est associé est une variété propre). Dans le cas d'un groupe algébrique connexe satisfaisant une hypothèse plus faible encore que la pseudo-réductivité, A. Borel et J. Tits ont mis en évidence que les deux premiers points ci-dessus au moins étaient encore valables [**10**] — les preuves sont écrites dans [**41**] et [**18**]. Il faut pour cela généraliser les notions de groupes paraboliques (2.1) et de variété propre (2.2.1). Rappelons qu'un intérêt de la structure de système de Tits [**13**, IV.1] est qu'elle fournit une preuve uniforme de la simplicité abstraite (modulo le centre) des groupes de points rationnels de groupes algébriques simples isotropes (sur un corps de base à au moins 4 éléments) [**35**]. En outre les systèmes de Tits à groupe de Weyl fini, par exemple ceux du point 2, ont été complètement classés [**39**]. Ceci, combiné au point 2 pour les groupes pseudo-réductifs (2.3.3), est une indication — vérifiée dans les faits — que les points rationnels des groupes pseudo-réductifs n'apportent en revanche rien de nouveau à la théorie abstraite des groupes.