339

ASTÉRISQUE

2011

SÉMINAIRE BOURBAKI
VOLUME 2009/2010
EXPOSÉS 1012-1026

(1023) *Sur les automorphismes de groupes libres et de groupes de surface*

Frédéric PAULIN

SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE
Publié avec le concours du CENTRE NATIONAL DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

Séminaire BOURBAKI Juin 2010
62^{e} année, 2009-2010, n^{o} 1023, p. 323 à 356

SUR LES AUTOMORPHISMES DE GROUPES LIBRES ET DE GROUPES DE SURFACE

par **Frédéric PAULIN**

INTRODUCTION

Soient $m, n, g \in \mathbb{N}$; considérons les trois beaux groupes suivants : le groupe spécial linéaire entier $\mathrm{SL}_m(\mathbb{Z})$, vu comme un archétype de sous-groupe arithmétique non uniforme ; le groupe $\mathrm{Mod}(\Sigma_g)$ des classes d'isotopies d'homéomorphismes préservant l'orientation d'une surface compacte connexe orientable Σ_g de genre g (appelé le *groupe modulaire*, ou groupe des difféotopies, et en anglais « Mapping class group », de Σ_g) ; et enfin le groupe $\mathrm{Out}(\mathbb{F}_n)$, quotient du groupe des automorphismes d'un groupe libre $\mathbb{F}_n$ de rang n par son sous-groupe des conjugaisons (appelé le *groupe des automorphismes extérieurs* de $\mathbb{F}_n$).

Le but de ce rapport est de décrire quelques-unes des analogies bien connues et fructueuses entre ces trois groupes, et surtout celles plus prononcées entre $\mathrm{Mod}(\Sigma_g)$ et $\mathrm{Out}(\mathbb{F}_n)$, qui ont été mises en évidence en particulier par les travaux de K. Vogtmann (voir les survols [**87, 7, 23**], dont le dictionnaire de M. Bestvina dans [**7**] et [**10**, §4.7]). Ces analogies sont des moteurs actuels de très nombreux résultats sur $\mathrm{Out}(\mathbb{F}_n)$, dus en particulier à Y. Algom-Kfir, M. Bestvina, M. Bridson, M. Clay, B. Farb, M. Feighn, V. Guirardel, U. Hamenstädt, M. Handel, I. Kapovich, G. Levitt, M. Lustig, R. Martin, L. Mosher, A. Pettet, K. Vogtmann. Ces trois groupes apparaissent dans de nombreux domaines des mathématiques, et une liste exhaustive de leurs similitudes et différences actuellement démontrées ne serait pas raisonnable dans le format imparti. Après une première partie concernant les motivations, nous nous concentrerons surtout sur des beaux espaces contractiles sur lequels ces groupes agissent avec des propriétés analogues, sur les propriétés communes de leurs sous-groupes, et sur les propriétés semblables (ou conjecturellement semblables) de leur géométrie asymptotique. Nous renvoyons par exemple à [**88**] pour une présentation de propriétés cohomologiques communes de ces trois groupes.

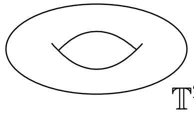
Le rédacteur remercie K. Vogtmann et G. Levitt pour des commentaires sur une version préliminaire de ce rapport, et ce dernier pour des conversations à l'origine de sa présentation.

1. POURQUOI ÉTUDIER CES GROUPES ?

Pour tout groupe G, nous noterons $\mathrm{Out}(G)$, et appellerons *groupe des automorphismes extérieurs* de G, le groupe quotient du groupe $\mathrm{Aut}(G)$ des automorphismes de G par son sous-groupe (distingué) $\mathrm{Int}(G) = \{i_g \colon h \mapsto ghg^{-1}\,,\ g \in G\}$ des *automorphismes intérieurs* de G. Puisque le groupe fondamental d'un espace topologique connexe par arcs pointé ne dépend pas du point base modulo automorphismes intérieurs, un choix de point base sera implicite, et toute application continue f entre deux espaces topologiques connexes par arcs induit un morphisme f_* entre leurs groupes fondamentaux, bien défini modulo conjugaison au but.

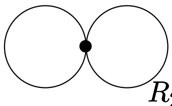
Pour tous $m, n, g \in \mathbb{N}$, nous allons nous intéresser au groupe des automorphismes extérieurs de trois groupes :

- un groupe abélien libre $\mathbb{Z}^m = \pi_1(\mathbb{T}^m)$ de rang m, où $\mathbb{T}^m = \prod_{i=1}^m \mathbb{S}_1$ est un tore de dimension m ;



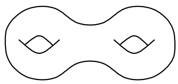
$\mathbb{T}^2$

- un groupe libre $\mathbb{F}_n = \pi_1(R_n)$ de rang n, où $R_n = \bigvee_{i=1}^n \mathbb{S}_1$ est un bouquet de n cercles pointés orientés ; nous noterons $s_1, \dots, s_n$ les classes d'homotopies pointées de ces cercles, de sorte que $\mathbb{F}_n$ soit l'ensemble des mots réduits en $s_1, \dots, s_n$ et leurs inverses, muni de la loi de concaténation-réduction ;



R_2

- un groupe de surface $\pi_1(\Sigma_g)$, où $\Sigma_g = \Sigma_{g,0} = \#_{i=1}^g \mathbb{S}_1 \times \mathbb{S}_1$ est une somme connexe de g tores de dimension 2, et plus généralement $\Sigma_{g,p}$ est une surface lisse compacte connexe orientable de genre g privée des intérieurs de p disques fermés plongés deux à deux disjoints, pour tout $p \in \mathbb{N}$.



Σ_2

Voici trois raisons d'étudier ces groupes et leurs automorphismes.

i) Les groupes $\mathbb{Z}^m$ et $\mathbb{F}_n$ vérifient des propriétés universelles fort utiles : tout groupe (respectivement groupe abélien) muni d'une partie génératrice ordonnée à n (respectivement m) éléments est naturellement un quotient de $\mathbb{F}_n$ (respectivement $\mathbb{Z}^m$). L'étude des groupes d'automorphismes de tels objets universels dans de telles catégories est un but en soi.

ii) Les surfaces et les homéomorphismes entre surfaces sont des objets fondamentaux en topologie de petite dimension.

Avant de justifier cette affirmation, rappelons les propriétés suivantes, dues à Dehn [**28**], Baer (1924), Nielsen (1927), Epstein (1966) : toute équivalence d'homotopie de Σ_g dans Σ_g est homotope à un homéomorphisme, et même à un difféomorphisme (voir par exemple [**70**]) ; deux homéomorphismes (ou difféomorphismes) de Σ_g sont homotopes si et seulement s'ils sont isotopes (c'est-à-dire homotopes à travers des homéomorphismes (ou difféomorphismes)), et si et seulement si leurs actions sur $\pi_1(\Sigma_g)$ diffèrent d'un automorphisme intérieur. La première propriété est remarquable, et son absence pour le bouquet de cercles R_n (de nombreux graphes finis ont le même type d'homotopie que R_n, par exemple) est l'une des raisons pour lesquelles les propriétés de $\mathrm{Out}(\mathbb{F}_n)$ ont des preuves plus techniques que celles pour $\mathrm{Mod}(\Sigma_g)$. Nous noterons dans la suite $\mathrm{Homeo}(\Sigma_g)$ le groupe topologique localement connexe par arcs des homéomorphismes de Σ_g, muni de la topologie compacte-ouverte, $\mathrm{Homeo}_+(\Sigma_g)$ son sous-groupe topologique d'indice 2 des homéomorphismes préservant l'orientation et $\mathrm{Homeo}_0(\Sigma_g)$ sa composante neutre, qui est son sous-groupe distingué des homéomorphismes isotopes à l'identité.

Décomposition de Heegaard. Pour toute variété topologique M compacte connexe orientable de dimension trois, il existe $g \in \mathbb{N}$ et $f : \Sigma_g \to \Sigma_g$ un homéomorphisme préservant l'orientation tel que, en notant H_g un corps à anses de bord Σ_g, la variété M soit homéomorphe au recollement $H_g \coprod_f H_g$ de deux copies de H_g le long de f. Notons (outre que g n'est pas unique) que l'on peut prendre pour H_g un voisinage régulier du 1-squelette d'une triangulation de M, et qu'un tel recollement ne dépend que de la classe d'isotopie de f, donc de la classe de f dans $\mathrm{Homeo}_+(\Sigma_g)/\mathrm{Homeo}_0(\Sigma_g)$ (voir par exemple [**82**]).

Surfaces incompressibles. Nous renvoyons par exemple à [**54, 57**] pour l'intérêt, de Haken à Thurston, des surfaces compactes connexes plongées dans une variété compacte connexe de dimension 3 et induisant une injection sur les groupes fondamentaux, en particulier des découpages le long de telles surfaces et des recollements par des homéomorphismes (dont seules les classes d'isotopie importent) le long des surfaces découpées.

Fibrés plats en surfaces. Soient M une variété connexe, $\widetilde{M} \to M$ un revêtement universel de groupe de revêtement Γ et $\rho : \Gamma \to \mathrm{Homeo}(\Sigma_g)$ un morphisme. Alors l'espace quotient $P = \Gamma\backslash(\widetilde{M} \times \Sigma_g)$ (pour l'action diagonale de Γ) est une variété qui fibre sur M (via l'application de P dans $\Gamma\backslash\widetilde{M}$ induite par la première projection), de fibre Σ_g, qui, à homéomorphisme près, ne dépend que de la classe d'isotopie de ρ. Par exemple, si $M = \mathbb{S}^1$ et $\Gamma = \mathbb{Z}$, la géométrie à la Thurston (voir par exemple [**86**]) de la variété P de dimension 3 est dictée par la classe de $\rho(1)$ dans $\mathrm{Homeo}(\Sigma_g)/\mathrm{Homeo}_0(\Sigma_g)$. Lorsque M est une surface compacte privée d'un nombre fini de points, la compréhension des morphismes de $\pi_1(M)$ dans $\mathrm{Homeo}(\Sigma_g)/\mathrm{Homeo}_0(\Sigma_g)$ est importante pour une bonne compréhension des surfaces complexes et des variétés symplectiques de dimension 4, dont la classification des fibrations de Lefschetz (voir les travaux de Donaldson, Gompf, Auroux, et par exemple [**61**]).

iii) Alors que $\mathbb{Z}^m$ est abélien, les groupes $\mathbb{F}_n$ et $\pi_1(\Sigma_g)$ sont des archétypes de groupes hyperboliques au sens de Gromov (voir par exemple [**38**]). En un certain sens, ce sont les seuls groupes hyperboliques dont les groupes des automorphismes extérieurs sont intéressants. Bien qu'il reste des recherches à effectuer sur les automorphismes des produits libres, nous avons en effet les deux résultats suivants. Par des travaux de Rips et du rédacteur (voir par exemple [**76**]), si Γ est un groupe hyperbolique qui ne se décompose pas en extension HNN ou produit amalgamé non trivial sur un groupe virtuellement monogène, alors $\mathrm{Out}(\Gamma)$ est fini. Par des travaux de Sela et Levitt (voir [**63**]), si Γ est un groupe hyperbolique sans torsion librement indécomposable, alors il existe $k, \ell \in \mathbb{N}$, des surfaces à bord (éventuellement vide) compactes connexes $S_1, \dots, S_k$, un sous-groupe G d'indice fini de $\mathrm{Out}(\Gamma)$ et, en notant $\mathrm{Homeo}(S_i, \partial S_i)$ le groupe topologique localement connexe par arcs des homéomorphismes de S_i préservant (globalement) chaque composante connexe du bord de S_i, une suite exacte

$$1 \longrightarrow \mathbb{Z}^\ell \longrightarrow G \longrightarrow \prod_{i=1}^{k} \pi_0\big(\mathrm{Homeo}(S_i, \partial S_i)\big) \longrightarrow 1 .$$

Le but de ce rapport est une étude comparative des trois groupes suivants :

- le groupe spécial linéaire entier $\mathrm{SL}_m(\mathbb{Z})$, d'indice 2 dans $\mathrm{Out}(\mathbb{Z}^m) = \mathrm{GL}_m(\mathbb{Z})$;
- le groupe modulaire $\mathrm{Mod}(\Sigma_g)$ de Σ_g, défini indifféremment comme

  $$\pi_0(\mathrm{Homeo}_+(\Sigma_g)),\;\; \mathrm{Homeo}_+(\Sigma_g)/\mathrm{Homeo}_0(\Sigma_g),\;\; \mathrm{Diff}_+(\Sigma_g)/\mathrm{Diff}_0(\Sigma_g)\;\; :$$

  par les résultats initiaux du point (ii) ci-dessus, les morphismes évidents de $\mathrm{Homeo}_+(\Sigma_g)/\mathrm{Homeo}_0(\Sigma_g)$ dans $\pi_0(\mathrm{Homeo}_+(\Sigma_g))$ et de $\mathrm{Diff}_+(\Sigma_g)/\mathrm{Diff}_0(\Sigma_g)$ dans $\mathrm{Homeo}_+(\Sigma_g)/\mathrm{Homeo}_0(\Sigma_g)$ sont des isomorphismes, et ce dernier groupe est d'indice 2 dans le groupe $\mathrm{Mod}_\pm(\Sigma_g) = \mathrm{Homeo}(\Sigma_g)/\mathrm{Homeo}_0(\Sigma_g)$, qui est isomorphe à $\mathrm{Out}\,\big(\pi_1(\Sigma_g)\big)$;
- le groupe $\mathrm{Out}(\mathbb{F}_n)$ des automorphismes extérieurs de $\mathbb{F}_n$, qui s'identifie avec le groupe des classes d'homotopie des équivalences d'homotopie du bouquet de cercles R_n par l'application induite sur le groupe fondamental.

La littérature sur ces groupes est abondante, et les analogies avec les groupes modulaires de surfaces sont une justification presque systématique des travaux sur $\mathrm{Out}(\mathbb{F}_n)$.

Les liens directs entre ces trois groupes sont pourtant peu nombreux. Notons que $\pi_1(\Sigma_{g,p})$ est un groupe libre de rang $2g+p-1$ si $p > 0$, ce qui permet d'étudier certains (mais seulement certains) automorphismes extérieurs de $\mathbb{F}_n$, dits *géométriques*, tels qu'il existe $g, p \in \mathbb{N} - \{0\}$ vérifiant $n = 2g + p - 1$ et un homéomorphisme de $\Sigma_{g,p}$ induisant cet automorphisme extérieur sur le groupe fondamental, par des méthodes