339

ASTÉRISQUE

2011

SÉMINAIRE BOURBAKI
VOLUME 2009/2010
EXPOSÉS 1012-1026

(1024) *Lois de conservation et régularité par compensation pour les systèmes antisymétriques et les surfaces de Willmore*

Sylvia SERFATY

SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE
Publié avec le concours du CENTRE NATIONAL DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

Séminaire BOURBAKI Juin 2010
62e année, 2009-2010, n° 1024, p. 357 à 370

LOIS DE CONSERVATION ET RÉGULARITÉ PAR COMPENSATION POUR LES SYSTÈMES ANTISYMÉTRIQUES ET LES SURFACES DE WILLMORE [d'après Tristan Rivière]

par **Sylvia SERFATY**

1. PROBLÈMES VARIATIONNELS INVARIANTS CONFORMES EN DIMENSION 2

Considérons un lagrangien (c'est-à-dire une fonctionnelle d'énergie) de la forme

$$L(u) = \int_D l(u, \nabla u)\, dx\, dy, \tag{1.1}$$

où D est un domaine simplement connexe et régulier de $\mathbb{R}^2$ (on peut se restreindre par exemple au disque unité car les questions abordées sont locales) et u est une application de D à valeurs dans une variété $\mathcal{N}$. Le lagrangien est coercif et à croissance quadratique si

$$c|p|^2 \leq l(z, p) \leq C|p|^2$$

pour $C > c > 0$. Il est *invariant conforme* si $L(u \circ f) = L(u)$ pour toute application f conforme de degré 1 qui préserve l'orientation.
La classe des problèmes variationnels invariants conformes contient l'exemple fondamental de l'énergie de Dirichlet

$$E(u) = \int_D |\nabla u|_g^2$$

pour les applications à valeurs dans une variété $\mathcal{N}$ de métrique g, dont les points critiques sont les *applications harmoniques* à valeurs dans $\mathcal{N}$. En fait un résultat de Grüter **[12]** dit que toute énergie invariante conforme coercive en dimension 2 peut se mettre sous la forme

$$L(u) = \frac{1}{2} \int_D |\nabla u|_g^2 + u^*\omega \tag{1.2}$$

où $u^*\omega$ est le « pull-back » de la 2-forme ω, et g est une métrique (ω et g sont C^1 si l est C^1 en z et C^2 en p).

Pour définir les points critiques de L, on peut soit écrire que u est point critique par rapport aux variations de ses coordonnées dans une carte locale, soit considérer la variété $\mathscr{N}$ comme immergée dans un espace euclidien $\mathbb{R}^n$, et écrire que u est point critique par rapport aux variations de la forme $\pi_{\mathscr{N}}(u+t\varphi)$ où $\varphi \in C^\infty$ et $\pi_{\mathscr{N}}$ est la projection sur la variété $\mathscr{N}$ (bien définie et régulière dans un voisinage tubulaire de $\mathscr{N}$). Dans le premier cas, si u est à valeurs dans une seule carte locale, l'équation des points critiques de (1.2) est

$$\Delta u^i + \sum_{k,l} \Gamma^i_{kl}(u) \nabla u^k \cdot \nabla u^l - 2 \sum_{kl} H^i_{kl}(u) \nabla^\perp u^k \cdot \nabla u^l = 0, \tag{1.3}$$

où u^i sont les coordonnées de u dans la carte locale, $\nabla^\perp$ désigne l'opérateur $(-\partial_y, \partial_x)$, Γ^i_{kl} sont les symboles de Christoffel correspondant à la métrique g, et H^i_{kl} est antisymétrique en k et l et relié à ω. Cette formulation intrinsèque est mal adaptée à l'étude de la régularité des points critiques de (1.2) : en effet, tant qu'on ne sait pas que l'application est justement continue, on ne peut pas garantir qu'elle prend ses valeurs dans une carte unique, même localement. De plus, on n'y voit pas les effets d'antisymétrie que l'on décrira ci-dessous.

Dans le deuxième cas, où l'on voit $\mathscr{N}$ comme immergée dans $\mathbb{R}^n$, l'équation des points critiques prend la forme

$$\Delta u + A(u)(\nabla u, \nabla u) = 2H(u) \partial_x u \times \partial_y u, \tag{1.4}$$

où A est la seconde forme fondamentale de la variété $\mathscr{N}$ [(1)], et cette fois les coordonnées de u sont prises dans l'espace ambiant. Cette forme est celle que l'on va examiner et qui permet l'étude de la régularité via l'apparition de l'antisymétrie.

Deux cas particuliers de ce type d'équations sont l'équation des applications harmoniques

$$\Delta u + A(u)(\nabla u, \nabla u) = 0 \tag{1.5}$$

et l'équation de la courbure moyenne prescrite

$$\Delta u = 2H(u) \partial_x u \times \partial_y u, \tag{1.6}$$

où $\times$ désigne le produit vectoriel.

Deux questions naturelles se posent sur ces classes d'équations :

- l'existence de limites faibles aux suites de Palais-Smale (ce qui permet de déduire l'existence de solutions au sens faible de l'équation)
- la régularité de ces solutions faibles.

---

(1) $A(u)(\nabla u, \nabla u)$ désigne $A(u)(\partial_x u, \partial_x u) + A(u)(\partial_y u, \partial_y u)$.

Une difficulté majeure est que ces équations sont toutes « critiques » au sens que la puissance de la non-linéarité ne permet pas de gagner en régularité : a priori une application u d'énergie finie est dans l'espace de Sobolev $W^{1,2}$ (qui ne s'injecte pas dans C^0), et donc le second membre dans (1.4) est a priori seulement dans L^1, ce qui ne permet de gagner aucune régularité par ellipticité. Un contre-exemple typique est $u(x) = \log\log\frac{1}{|x|}$, non régulier en 0 et solution d'une équation avec ce même type de non-linéarité quadratique en le gradient :

$$\Delta u = -|\nabla u|^2.$$

De manière frappante, Frehse [**11**] a montré que cette équation, qui est invariante conforme, est variationnelle, c'est-à-dire provient d'un lagrangien, qui n'est lui cependant pas invariant conforme (et donc les résultats décrits ci-dessous ne s'appliquent pas).

En réalité les solutions de (1.4) ont bien davantage de régularité que $W^{1,2}$, mais pour l'obtenir, il faut utiliser (et remarquer !) une *structure* supplémentaire particulière du second membre : via des transformations sur l'équation, que l'on décrira, on fait apparaître une structure en déterminant jacobien.

Avant de détailler, énonçons tout de suite le résultat général obtenu par Tristan Rivière, qui répond positivement à une conjecture de Hildebrandt :

THÉORÈME 1.1 (Rivière [**14**]). — *Les points critiques d'énergie finie des lagrangiens invariants conformes en dimension 2 coercifs à croissance quadratique ont une régularité höldérienne $C^{0,\alpha}$ pour tout $0 < \alpha < 1$.*

Le même résultat est vrai en dimension plus grande pour les points critiques *stationnaires* d'énergie finie, pour les mêmes lagrangiens quadratiques. Ceci généralise le résultat de Bethuel [**4**].

Il répond également positivement à la question de la compacité des suites de Palais-Smale, on le verra ci-dessous.

2. LES INGRÉDIENTS UTILISÉS

Le théorème 1.1 étend des résultats précédents d'Hélein, Evans [**13, 10**] pour les applications harmoniques (1.5), et Bethuel [**3**] pour l'équation à courbure moyenne prescrite (1.6). Il présente en réalité un cadre unifié pour l'équation la plus générale (1.4) (et en fait même une classe plus large d'équations, on le verra ci-dessous), et permet de relaxer nettement les hypothèses précédemment faites : la variété cible $\mathcal{N}$ n'a plus besoin d'être aussi régulière, la courbure prescrite $H(u)$ n'a plus besoin d'être supposée Lipschitz mais peut être seulement L^∞ (répondant positivement à la conjecture de Heinz).

La preuve utilise deux ingrédients cruciaux (qui n'étaient qu'en partie présents dans les résultats précédents) :

- une loi de conservation
- l'intégrabilité par compensation, c'est-à-dire la mise en évidence, via la loi de conservation, d'une structure en déterminant jacobien.

2.1. Intégrabilité par compensation

Le phénomène d'intégrabilité par compensation consiste en un gain de régularité meilleur que prévu dans les équations elliptiques dont le second membre a la forme d'un déterminant jacobien, typiquement

$$\begin{cases} -\Delta\varphi = \partial_x a\,\partial_y b - \partial_x b\,\partial_y a & \text{dans } D \\ \varphi = 0 & \text{sur } \partial D. \end{cases}$$

Le théorème de Wente [20] dit que, si $a, b \in W^{1,2}(D)$, alors $\varphi \in C^0 \cap W^{1,2}(D)$ avec

$$\|\varphi\|_{L^\infty(D)} + \|\varphi\|_{W^{1,2}(D)} \leq C\|\nabla a\|_{L^2(D)}\|\nabla b\|_{L^2(D)}.$$

Un résultat découlant de Coifman-Rochberg-Weiss [7] (et dont on trouve une preuve plus simple dans Coifman-Lions-Meyer-Semmes [6]) améliore ce résultat en $\varphi \in W^{2,1}(D)$ avec l'estimée

$$\|\varphi\|_{W^{2,1}(D)} \leq C\|\nabla a\|_{L^2(D)}\|\nabla b\|_{L^2(D)}.$$

Ces deux résultats donnent une régularité meilleure qu'attendue puisque le second membre est seulement L^1, ce qui ne garantit pas la continuité (c'est le cas limite). Pour les démontrer, négligeant la donnée au bord, on écrit

$$\varphi = \frac{1}{2\pi}\log\frac{1}{r} * (\partial_x a\,\partial_y b - \partial_x b\,\partial_y a)$$

et on fait une intégration par parties astucieuse en coordonnées polaires (et pour le résultat de [6] on utilise en plus la dualité Hardy-BMO).

On voit que le théorème de Wente permet par exemple de traiter le cas de l'équation à courbure moyenne constante $\Delta u = 2H\,\partial_x u \times \partial_y u$ dont le second membre a essentiellement cette structure jacobienne. Le cas plus général $H(u)$ avec H Lipschitz est traité dans [3] en exploitant la même idée. La régularité $u \in C^{0,\alpha}$ se déduit de l'estimée de Wente par des arguments assez classiques utilisant des estimées à la Morrey : on montre que $\sup_\rho \rho^{-2\alpha}\int_{B(x_0,\rho)}|\nabla u|^2 < \infty$, ce qui entraîne $\sup_\rho \rho^{-\alpha}\int_{B(x_0,\rho)}|\Delta u| < \infty$. Des estimées d'Adams sur les potentiels de Riesz [1], on déduit $u \in W^{1,p}$ pour un $p > 2$ puis $u \in C^{0,\alpha}$.