348 ASTÉRISQUE

2012

SÉMINAIRE BOURBAKI
VOLUME 2010/2011
EXPOSÉS 1027-1042

(1030) *Analyticité discrète du modèle d'Ising*

Wendelin WERNER

SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE

Publié avec le concours du CENTRE NATIONAL DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

Séminaire BOURBAKI Novembre 2010
63e année, 2010-2011, n° 1030, p. 100 à 117

ANALYTICITÉ DISCRÈTE DU MODÈLE D'ISING
[d'après Stanislav Smirnov]

par **Wendelin WERNER**

1. INTRODUCTION

La notion de fonction harmonique sur un graphe a un sens simple et naturel (la valeur de la fonction en un point est égale à la moyenne de la fonction aux sites voisins), et pour des graphes plans simples comme les portions du graphe $\mathbb{Z}^2$, il est en fait facile de définir sa fonction harmonique conjuguée, et de définir des fonctions « holomorphes discrètes ». Ce sont en quelque sorte les fonctions qui vérifient, en tous points, des versions discrétisées des équations de Cauchy-Riemann. Par exemple, lorsque la fonction complexe F est définie sur une portion du graphe carré $\mathbb{Z}^2$ que l'on plonge dans $\mathbb{C}$, la relation discrète sera du type

$$F(z+i) - F(z+1) = i(F(z+i+1) - F(z)).$$

Rappelons qu'une interprétation des équations de Cauchy-Riemann ordinaires consiste à dire qu'une fonction est analytique en z si son gradient dans la direction $i-1$ est égal à i fois son gradient dans la direction $i+1$. On utilisera dans ce texte le terme « analyticité discrète » pour décrire de telles fonctions, ce qui est un tout petit peu impropre car, dans le continu, l'analyticité fait plus référence au fait que la fonction est localement une série entière (et cette approche ne se généralise pas aisément au cas discret).

Une question qui a toujours occupé les mathématiciens purs ou appliqués est de chercher à comprendre comment les structures continues peuvent être approchées par des structures discrètes. Les propriétés des fonctions analytiques (dans le continu, ainsi que sur des graphes) concernant par exemple les intégrales de contour permettent relativement simplement de voir les fonctions analytiques comme limites de fonctions analytiques discrètes sur des réseaux de plus en plus fins, et inversement de vérifier que certaines suites de fonctions analytiques discrètes convergent nécessairement (en un sens ad hoc) vers une fonction analytique continue. Cette thématique remonte au moins jusqu'aux travaux de Jacqueline Ferrand dans les années 1940, voir [**8**].

Les travaux récents de Stanislav Smirnov (dont plusieurs sont en collaboration avec Dmitry Chelkak) ont montré que les problèmes issus de la physique statistique sur réseau constituent un champ d'application privilégié et spectaculaire de ce type d'idées classiques. En fait, il s'avère que l'étude de ces modèles donne précisément de « bonnes » voies pour définir ces approximations discrètes de manière élégante (il est par exemple possible de montrer simplement le théorème de Riemann à partir de considérations élémentaires sur les pavages de domaines plans par des dominos).

Nous allons dans le présent texte principalement détailler une partie de la preuve de « l'invariance conforme du modèle d'Ising » en suivant les arguments de l'article [**24**] de Stanislav Smirnov. On peut décomposer cette preuve en plusieurs étapes :

- La première consiste à reformuler la question initiale concernant le modèle d'Ising via certains modèles de familles de boucles aléatoires.
- La seconde étape, qui sera celle sur laquelle nous insisterons le plus, est de montrer que certaines fonctions définies comme des espérances de certaines quantités (pour ces modèles de boucles) sont en fait exactement analytiques discrètes.
- Ensuite, il faut exploiter cette analyticité discrète et montrer que, lorsque la maille du réseau tend vers 0, ces fonctions analytiques discrètes convergent vers une certaine fonction analytique continue.
- Finalement, il faut utiliser ce résultat, un peu comme un ouvre-boîte, pour décrire le comportement complet du système (et pas uniquement ces fonctions particulières) lorsque la maille du réseau tend vers 0.

Chacune des trois dernières étapes s'avère non-triviale. La dernière requiert en fait des techniques différentes, ainsi que l'introduction des processus de Loewner-Schramm (SLE) dont nous ne parlerons pas du tout ici. Afin d'éviter que le lecteur non-initié ne se perde dans les définitions de nombreux modèles probabilistes discrets, nous avons choisi de ne pas commencer par présenter la première étape, mais de définir directement le modèle de boucles aléatoires et les fonctionnelles particulières qu'il est possible de définir dans ce cas, et nous reviendrons très brièvement à la fin de ce texte sur la définition du modèle d'Ising et le lien entre celui-ci et ces modèles de boucles.

2. LE MODÈLE DE BOUCLES

On se donne une portion simplement connexe d'un réseau carré de type $\delta\mathbb{Z}^2$. Chaque petite face carrée est alors remplie avec l'un des deux dessins suivants :

Ainsi, le remplissage d'un domaine donne une configuration avec des chemins ouverts et des boucles comme dans la figure 1. On cherche alors à décrire la géométrie

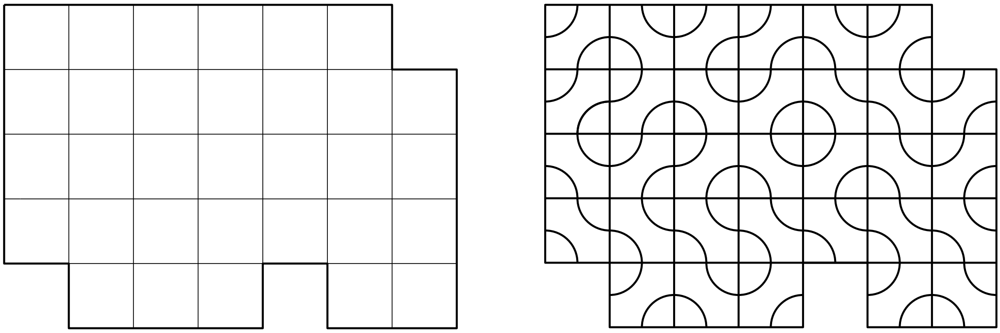

FIGURE 1. Un domaine et une configuration.

des courbes obtenues et à obtenir des informations qui permettront de contrôler le passage à la limite lorsque le domaine devient très grand (et la maille du réseau est fixée) ou lorsque la maille du réseau tend vers 0 (et le domaine est fixé). On peut fixer des conditions au bord *a priori*, les deux plus simples étant celles de la figure 2.

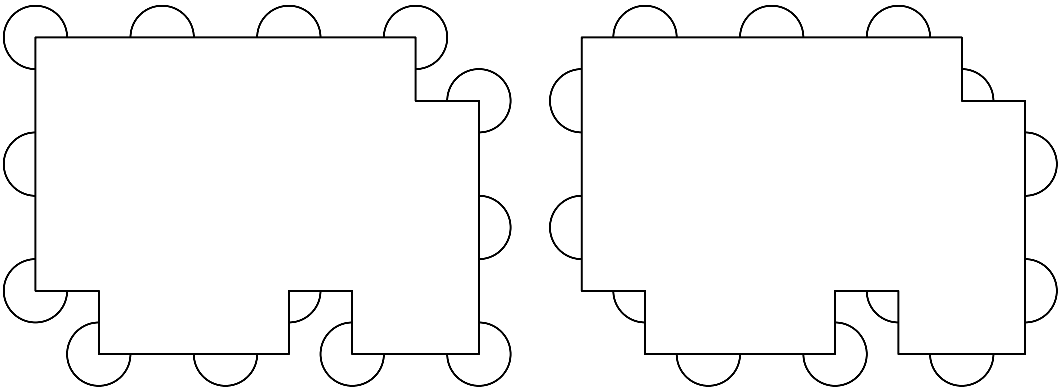

FIGURE 2. Les conditions au bord.

Pour chacune de ces conditions au bord, la configuration précédente devient alors une configuration formée de boucles fermées (voir la figure 3).