348

ASTÉRISQUE

2012

SÉMINAIRE BOURBAKI
VOLUME 2010/2011
EXPOSÉS 1027-1042

(1036) *Invariants de Welschinger*

Alexandru OANCEA

SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE
Publié avec le concours du CENTRE NATIONAL DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

Séminaire BOURBAKI Avril 2011
63e année, 2010-2011, n° 1036, p. 265 à 297

INVARIANTS DE WELSCHINGER

par **Alexandru OANCEA**

Le but de cet exposé est de présenter des invariants découverts par Welschinger qui sont adaptés à des problèmes de géométrie énumérative réelle. Ces problèmes énumératifs sont classiquement formulés dans le cadre de la géométrie algébrique réelle mais ils trouvent leur solution la plus naturelle dans le cadre de la géométrie symplectique réelle. Ceci permet en particulier de les étudier via des techniques spécifiques puissantes comme la théorie symplectique des champs. Les invariants de Welschinger sont des analogues réels de certains invariants de Gromov-Witten.

1. INTRODUCTION

Une *variété symplectique réelle* (X, ω, c_X) est une variété différentiable munie d'une 2-forme fermée non-dégénérée ω – la forme symplectique – et d'une involution anti-symplectique $c_X : X \to X$, vérifiant $c_X^*\omega = \text{-}\omega$ – la *structure réelle.* La dimension de X est nécessairement paire, notée $2n$. S'il est non-vide, le *lieu réel* $\mathbb{R}X = \mathrm{Fix}(c_X) \subset X$ est une sous-variété lisse lagrangienne, i.e. $\dim \mathbb{R}X = n$ et $\omega|_{\mathbb{R}X} = 0$. Ceci découle de l'énoncé analogue pour les structures réelles linéaires sur $\mathbb{R}^{2n}$ et du théorème des fonctions implicites. Citons les exemples fondamentaux suivants : les espaces des phases $(T^*L, d\mathbf{p} \wedge d\mathbf{q})$ de la mécanique classique, associés à des espaces de configurations L qui sont des variétés lisses, munis de la structure réelle canonique $c_L : (\mathbf{p}, \mathbf{q}) \mapsto (-\mathbf{p}, \mathbf{q})$; l'espace projectif $\mathbb{P}^n$ muni de la forme de Fubini-Study et de la structure réelle *conj* donnée par la conjugaison complexe ; les variétés projectives lisses définies par des polynômes homogènes à coefficients réels, avec la structure induite par celle de $\mathbb{P}^n$. On a un modèle local pour (X, ω, c_X) au voisinage de $L = \mathbb{R}X$: un voisinage de L est isomorphe à un voisinage de la section nulle dans $(T^*L, d\mathbf{p} \wedge d\mathbf{q}, c_L)$ [**47**].

Depuis Gromov [**16**] nous savons qu'il est utile de regarder les variétés symplectiques comme des analogues « flexibles » des variétés kählériennes. De façon plus précise, soit $\mathcal{J}_\omega$ l'espace des structures presque-complexes J (de classe C^ℓ, $\ell \gg 1$) sur TX qui sont *ω-compatibles*, i.e. telles que $\omega(\cdot, J\cdot)$ est une métrique riemannienne. Les éléments de $\mathcal{J}_\omega$ sont les sections C^ℓ d'un fibré à fibres contractiles, isomorphes à $\mathrm{Sp}(2n)/\mathrm{U}(n)$, de sorte que $\mathcal{J}_\omega$ est une variété de Banach séparable non-vide et contractile. En présence d'une structure réelle c_X on obtient une involution $\overline{c_X}^* : \mathcal{J}_\omega \to \mathcal{J}_\omega, \quad J \mapsto -dc_X \circ J \circ dc_X$ dont le lieu des points fixes $\mathbb{R}\mathcal{J}_\omega$ est l'espace des structures presque-complexes ω-compatibles qui rendent c_X anti-holomorphe. Welschinger a montré que l'espace $\mathbb{R}\mathcal{J}_\omega$ est une variété de Banach séparable et contractile [**49**, §1.1].

Un choix de $J \in \mathcal{J}_\omega$ permet de considérer l'espace des *courbes (rationnelles) J-holomorphes* $u : \mathbb{P}^1 \to (X, J)$, solutions de l'équation $du + J \circ du \circ j = 0$ où j est la structure complexe de $\mathbb{P}^1$. C'est une équation de type Cauchy-Riemann, elliptique d'indice $2c_1(X)d + 2n$, où $d = u_*[\mathbb{P}^1] \in H_2(X; \mathbb{Z})$ et $c_1(X)$ est la première classe de Chern du fibré complexe (TX, J). Lorsque $J \in \mathbb{R}\mathcal{J}_\omega$, il existe une involution naturelle $u \mapsto c_X \circ u \circ conj$ sur l'espace des courbes J-holomorphes, et ses points fixes s'appellent *courbes J-holomorphes réelles.* On considère par la suite les espaces de solutions modulo reparamétrisation conforme à la source, et on parle alors d'*espaces de modules.*

La variété symplectique (X, ω) est dite *semi-positive* (resp. *fortement semi-positive*) si, pour toute classe sphérique $d \in H_2(X; \mathbb{Z})$ telle que $[\omega]d > 0$, on a l'implication $c_1(X)d \geq 3 - n \;\Rightarrow\; c_1(X)d \geq 0$ (resp. $c_1(X)d \geq 2 - n \;\Rightarrow\; c_1(X)d \geq 0$). Les invariants de Gromov-Witten (en genre 0) d'une variété semi-positive sont définis de la façon suivante [**35**] : on se restreint aux courbes dites *simples* qui ne factorisent pas à travers un revêtement ramifié non-trivial de $\mathbb{P}^1$, on enrichit la source $\mathbb{P}^1$ de points marqués mobiles, on impose des conditions d'incidence aux points marqués de façon à ramener la dimension des espaces de modules à zéro, et finalement on compte les solutions. Notons les deux spécificités suivantes : (i) le résultat peut être interprété de façon duale comme le calcul d'une intégrale sur l'espace de modules de courbes avec points marqués. Ce dernier porte une *classe fondamentale* puisqu'il possède une *compactification par des strates de codimension* $\geq$ 2. Par ailleurs, les conditions d'incidence ne doivent pas nécessairement être ponctuelles, ce qui a des conséquences profondes comme par exemple l'existence du produit quantique sur $H^*(X; \mathbb{Z})$ [**33, 40, 35**] ; (ii) lorsque les conditions d'incidence sont représentées par des sous-variétés J-complexes, les courbes sont *comptées avec le même signe.* Ceci est une manifestation de la positivité des intersections des objets holomorphes.

Le cas particulier des conditions d'incidence ponctuelles est fondamental pour la suite. Soient $d \in H_2(X;\mathbb{Z})$ et $\mathcal{M}_k^d(X,J)^*$ l'espace des modules de courbes J-holomorphes simples avec k points marqués, qui représentent la classe d.

On suppose que $(n-1)$ *divise* $(c_1(X)d-2)$ *et on pose* $k = k_d = \frac{1}{n-1}(c_1(X)d-2)+1$.

Soit $\underline{x} \in X^k$ un k-uplet de points deux à deux distincts. Pour un choix générique de $J \in \mathcal{J}_\omega$ l'espace $\mathcal{M}_k^d(X,J)^*$ est une variété de dimension $2c_1(X)d + 2n - 6 + 2k$ et $\underline{x}$ est une valeur régulière de l'application d'évaluation

$$\mathrm{ev}_J : \mathcal{M}_k^d(X,J)^* \to X^k, \qquad (u, z_1, \ldots, z_k) \mapsto (u(z_1), \ldots, u(z_k)).$$

La valeur de k a été choisie telle que la source et le but de ev_J soient de même dimension. Notons que ev_J admet une extension naturelle $\overline{\mathrm{ev}}_J : \overline{\mathcal{M}}_k^d(X,J)^* \to X^k$ à la compactification de Gromov-Kontsevich par des courbes stables **[33, 35]**. On note $\mathcal{M}^d(\underline{x},J) = \mathrm{ev}_J^{-1}(\underline{x})$ et $\overline{\mathcal{M}}^d(\underline{x},J) = \overline{\mathrm{ev}}_J^{-1}(\underline{x})$. Pour J générique la fibre $\mathcal{M}^d(\underline{x},J)$ est compacte, formée d'un nombre fini de points qui sont des courbes immergées. Voici une ébauche d'argument pour montrer que ce nombre $N_d(\underline{x},J)$ ne dépend pas du choix de $\underline{x}$ ou du choix générique de J. On fixe $\underline{x}$ et on démontre l'indépendance par rapport à J en utilisant une méthode de continuité : soit $\mathcal{J}_\omega^0(\underline{x}) \subset \mathcal{J}_\omega$ l'ensemble des J pour lesquels $\mathcal{M}^d(\underline{x},J)$ contient des courbes cuspidales, ou pour lesquels $\overline{\mathcal{M}}^d(\underline{x},J)$ contient des courbes réductibles. Le point clé est que $\mathcal{J}_\omega^0(\underline{x})$ est une union au plus dénombrable de sous-variétés de codimension ≥ 2 de $\mathcal{J}_\omega$. Soient $J_0, J_1 \in \mathcal{J}_\omega$ tels que $N_d(\underline{x},J_0)$ et $N_d(\underline{x},J_1)$ soient définis. L'espace $\mathcal{J}_\omega$ étant contractile, il existe un chemin J_t, $t \in [0,1]$ reliant J_0 à J_1. Pour un choix générique du chemin, l'espace de modules à paramètre $\mathcal{M} = \bigcup_t \{t\} \times \mathcal{M}^d(\underline{x},J_t)$ est une variété de dimension 1, et les points critiques de la projection naturelle $\mathcal{M} \to [0,1]$ sont les courbes cuspidales. Un chemin générique évite $\mathcal{J}_\omega^0(\underline{x})$, de sorte que $\mathcal{M}$ est un revêtement propre de $[0,1]$. On obtient que la fonction $N_d(\underline{x},J_t)$ est localement constante, donc constante sur $[0,1]$. Par ailleurs $N_d(\underline{x},J)$ est localement constante en $\underline{x}$ à J fixé. Puisque $X^k \setminus \mathrm{Diag}$ est connexe, on obtient que $N_d = N_d(\underline{x},J)$ ne dépend pas du choix de $\underline{x}$ et J.

Supposons maintenant données une structure réelle c_X et une classe d'homologie $d \in H_2(X;\mathbb{Z})$ telle que $(c_X)_*d = -d$ et $(n-1)$ divise $c_1(X)d - 2$, de sorte que $k = k_d \in \mathbb{N}$. On suppose par la suite $k \geq 1$. On considère $J \in \mathbb{R}\mathcal{J}_\omega$ et une collection réelle de points $\underline{x} \in X^k \setminus \mathrm{Diag}$, i.e. une collection composée de r points dans $\mathbb{R}X$ et de r_X paires de points dans $X \setminus \mathbb{R}X$ conjugués par c_X, avec $r + 2r_X = k$. Notons $R^d(\underline{x},J)$ le nombre de courbes rationnelles J-holomorphes réelles passant par $\underline{x}$.

Le nombre $R^d(\underline{x},J)$ dépend à r fixé du choix de $\underline{x}$ ou encore, de façon équivalente, du choix de J [(1)]. Il s'ensuit que l'argument qui montrait l'indépendance de $N_d(\underline{x},J)$ par rapport aux choix doit nécessairement tomber en défaut. En effet, ce dernier était

(1) Voir l'exemple des cubiques rationnelles dans $\mathbb{P}^2$ à la fin de cette section.

basé sur le fait que l'espace $\mathcal{J}_\omega^0(\underline{x})$ des « accidents » vivait en codimension ≥ 2. Par contraste, la partie réelle $\mathbb{R}\mathcal{J}_\omega^0 \subset \mathbb{R}\mathcal{J}_\omega$ vit en codimension ≥ 1 et ne pourra plus être évitée par un chemin $(J_t) \subset \mathbb{R}\mathcal{J}_\omega$ générique.

Ceci était à peu de choses près la situation avant les travaux que nous exposons dans cet article. Il y avait des murs – dans $\mathbb{R}\mathcal{J}_\omega$ – que l'on ne savait pas comment franchir. Welschinger a imaginé le phénomène suivant :

Il est possible d'attribuer des signes aux courbes réelles soumises à des conditions d'incidence ponctuelles de manière à ce que leur comptage algébrique soit un invariant.

La démarche de Welschinger est la suivante : (i) il fixe une composante connexe L de $\mathbb{R}X$ et un entier $0 \leq r \leq k_d$, avec $r \geq 1$ si $n \geq 3$; (ii) il fixe une collection réelle de points $\underline{x} \in \mathbb{R}(X^k \setminus \mathrm{Diag})$ ayant r points réels appartenant tous à L, et il choisit $J \in \mathbb{R}\mathcal{J}_\omega$ assez générique pour que $\underline{x}$ soit une valeur régulière de l'application d'évaluation

$$\mathbb{R}\mathrm{ev} : \mathbb{R}\mathcal{M}_k^d(X, J)^* \to \mathbb{R}(X^k)$$

et pour que la préimage de $\underline{x}$ par $\mathbb{R}\overline{\mathrm{ev}} : \mathbb{R}\overline{\mathcal{M}}_k^d(X, J)^* \to \mathbb{R}(X^k)$ ne contienne pas de courbes réductibles. Ceci assure en particulier la compacité de $\mathbb{R}\mathrm{ev}^{-1}(\underline{x})$; (iii) *il attribue des signes* $\varepsilon^{\mathfrak{p}}(C) \in \{\pm 1\}$ *aux éléments* $C \in \mathbb{R}\mathrm{ev}^{-1}(\underline{x})$ et définit

$$\chi_r^{d,\mathfrak{p}}(\underline{x}, J) := \sum_{C \in \mathbb{R}\mathrm{ev}^{-1}(\underline{x})} \varepsilon^{\mathfrak{p}}(C).$$

On appellera les signes $\varepsilon^{\mathfrak{p}}(C)$ *signes de Welschinger*(2). La recette d'attribution des signes est valable pour des variétés symplectiques de dimension arbitraire. En dimension $n \geq 3$, on requiert qu'une certaine hypothèse de nature topologique soit vérifiée, hypothèse qui assure l'existence d'une structure Pin_n^-, ou Pin_n^+, ou Spin sur un fibré vectoriel approprié au-dessus de $\mathbb{R}X$. La définition des signes en dimension $n \geq 3$ utilise le choix d'une telle structure $\mathfrak{p}$, cf. §2.3. Finalement, (iv) Welschinger démontre

THÉORÈME 1.1 ([**49, 50, 55**]). — *Soit L une composante connexe de $\mathbb{R}X$ et $r \in \{0, \dots, k_d\}$ avec $r \geq 1$ si $n \geq 3$. On considère des collections $\underline{x} \in \mathbb{R}(X^k \setminus \mathrm{Diag})$ ayant r points réels, situés tous sur L. En dimension 2 (resp. 3), le nombre $\chi_r^d(L) = \chi_r^d(\underline{x}, J)$ (resp. $\chi_r^{d,\mathfrak{p}}(L) = \chi_r^{d,\mathfrak{p}}(\underline{x}, J)$ avec $\mathfrak{p}$ une structure Pin_3^-) ne dépend ni du choix de $\underline{x}$, ni du choix générique de J.*

Puisque le lieu réel de $\mathbb{P}^1$ est connexe, il ne peut y avoir de courbe J-holomorphe réelle passant par $\underline{x}$ que si tous les points réels de $\underline{x}$ appartiennent à la même composante de $\mathbb{R}X$. Ceci justifie le choix d'une composante L dans la définition de l'invariant $\chi_r^d(L)$, qui dépend par ailleurs de ce choix. Lorsque $\mathbb{R}X$ est connexe, on

(2) Lorsque $n \geq 3$, Welschinger appelle ce signe *état spinoriel de C* et le note $sp(C)$ [**50, 55**].