348 ASTÉRISQUE

2012

SÉMINAIRE BOURBAKI
VOLUME 2010/2011
EXPOSÉS 1027-1042

(1042) *Existence globale et scattering pour les solutions de masse finie de l'équation de Schrödinger cubique en dimension deux*

Fabrice PLANCHON

SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE
Publié avec le concours du CENTRE NATIONAL DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

Séminaire BOURBAKI Juin 2011
63e année, 2010-2011, n° 1042, p. 425 à 447

EXISTENCE GLOBALE ET SCATTERING POUR LES SOLUTIONS DE MASSE FINIE DE L'ÉQUATION DE SCHRÖDINGER CUBIQUE EN DIMENSION DEUX [d'après Benjamin Dodson, Rowan Killip, Terence Tao, Monica Vişan et Xiaoyi Zhang]

par **Fabrice PLANCHON**

INTRODUCTION

Nous considérons l'équation de Schrödinger nonlinéaire

$$\begin{cases} i\partial_t u + \Delta u &= \pm |u|^2 u, \\ u(x,0) &= u_0(x) \end{cases} \tag{1}$$

posée dans l'espace entier $\mathbb{R}^2$. Dans le cas où la nonlinéarité est précédée d'un signe $+$ (resp. $-$), l'équation est dite défocalisante (resp. focalisante). Cette équation apparaît de manière naturelle dans de nombreux modèles physiques, par exemple comme approximation paraxiale d'une équation des ondes en lien avec la focalisation d'un faisceau laser (voir par exemple [**43**]). On retiendra que, dans ce cadre, la variable « temporelle » est en fait une variable spatiale dans la direction de propagation de l'onde, et que les variables du laplacien sont les variables (spatiales) transverses. L'équation (1) n'a qu'un lointain rapport avec la réalité physique du modèle (en particulier, le milieu de propagation n'a pas de raison d'être homogène et spatialement infini), mais la description des propriétés qualitatives de ses éventuelles solutions aura été une préoccupation constante depuis les années 1970.

Plus généralement, nous pouvons considérer le même type d'équation où la nonlinéarité devient $\pm|u|^{p-1}u$ et où la dimension d'espace est quelconque, $x \in \mathbb{R}^n$, $n \geq 1$. Deux exposants occupent une place particulière, reliée aux lois de conservation que nous détaillerons ultérieurement : $p = 1 + 4/n$, qui est une généralisation en dimension quelconque du cas cubique (on parlera de l'équation de masse critique) ; et $p = 1 + 4/(n-2)$, qui correspond à l'équation d'énergie critique ($p = 5$ pour $n = 3$). Il est virtuellement impossible d'être exhaustif sur les résultats connus, tant ils sont nombreux et variés, aussi nous citons ceux qui nous sont apparus les plus directement reliés avec l'objet de ce séminaire, dans un ordre qui n'est pas chronologique :

– le problème de Cauchy pour l'équation (1) est bien posé, localement en temps, pour des données initiales $u_0(x)$ de masse finie :

$$\int_{\mathbb{R}^2} |u_0(x)|^2 \, dx = \|u_0\|_2^2 < +\infty. \tag{2}$$

Le temps d'existence dépend du profil de la donnée et non simplement de sa norme, et la solution est globale pour une masse petite ([**7**]). Ce type de résultat (perturbation de la solution nulle) repose sur les propriétés dispersives du flot linéaire, et en particulier l'estimation de Strichartz ([**42**]),

$$\| \exp(it\Delta)u_0\|^4_{L^4_{t,x}} = \int_{\mathbb{R}^3} | \exp(it\Delta)u_0|^4 \, dxdt \lesssim \|u_0\|_2^4. \tag{3}$$

– Dans le cas défocalisant, lorsque la donnée initiale u_0 est non seulement de masse finie mais possède également un gradient et un moment dans L^2_x,

$$\|u_0\|^2_\Sigma = \int_{\mathbb{R}^2} |u_0(x)|^2 \, dx + \int_{\mathbb{R}^2} |\nabla_x u_0(x)|^2 \, dx + \int_{\mathbb{R}^2} |x|^2 |u_0(x)|^2 \, dx < +\infty, \tag{4}$$

la solution est globale dans Σ et diffuse à l'infini (phénomène de scattering) : il existe deux états $u^\pm \in \Sigma$ tels que

$$\lim_{t\to\pm\infty} \|u(x,t) - \exp(it\Delta)u^\pm\|_\Sigma = 0. \tag{5}$$

Remarquons que dans Σ comme plus tard dans L^2_x, on a l'asymptotique suivante de la solution linéaire, qui résulte de la factorisation du propagateur de Schrödinger :

$$\lim_{t\to\pm\infty} \| \exp(it\Delta)f - (4\pi it)^{-1} e^{i|x|^2/(4t)} \hat{f}(x/(2t))\| = 0\,, \tag{6}$$

où $\hat{f}$ désigne la transformée de Fourier de f.

– Dans le cas focalisant, l'existence de solutions particulières, les solitons, de type $u(x,t) = e^{it}Q(x)$ où Q est la solution de masse minimale de l'équation stationnaire (où 3 serait remplacé par $1 + 4/n$ en dimension quelconque)

$$-Q + \Delta Q + Q^3 = 0 \tag{7}$$

montre qu'il ne peut y avoir diffusion en toute généralité. En fait, un argument élémentaire de viriel ([**25**]) montre qu'il y a explosion en temps fini pour une large classe de données dans Σ (en outre, une transformation explicite du soliton, la transformation pseudo-conforme, [**21**], produit une solution explosive en $t = 0$ avec vitesse $1/t$). Néanmoins, si la masse initiale est strictement inférieure à celle de Q, il y a existence globale ([**47**]). Enfin, il existe un ensemble de données de masse légèrement supérieure à celle de Q qui explose suivant la loi dite du log-log ([**37**] et références incluses, ou [**6**] pour une présentation synthétique), un résultat majeur reposant sur une quantification dynamique du phénomène d'explosion.

À ce bref historique, il convient de rajouter que, dans le cadre perturbatif des données de petite masse, un corollaire direct de la théorie de Cauchy est la diffusion dans L^2_x, avec

$$u^{\pm} = u_0 \pm \int_0^{\pm\infty} \exp(-is\Delta)(|u|^2 u)(s)\, ds, \tag{8}$$

où l'intégrale est bien définie dans L^2_x comme conséquence directe d'une propriété d'intégrabilité en espace-temps de la solution,

$$\int_{\mathbb{R}^3} |u|^4(x,t)\, dxdt < +\infty. \tag{9}$$

Dès lors, il est naturel de conjecturer

- dans le cas défocalisant, l'équation (1) est globalement bien posée pour des données de masse finie quelconque et il y a diffusion dans L^2_x ;
- dans le cas focalisant, le même résultat est vrai si la masse est strictement inférieure à la masse de l'état fondamental Q.

Remarque 0.1. — Le problème de Cauchy à basse régularité n'est pas ici une fin en soi ; l'étude des propriétés de l'opérateur de scattering, celui qui à u^- associe u^+, présente un intérêt bien supérieur. Cependant, une théorie de Cauchy robuste, dans un cadre fonctionnel bien adapté aux invariances naturelles de l'équation, est un préalable inévitable.

Plus généralement, la conjecture s'étendait à toutes les nonlinéarités de masse critique en dimension quelconque ; les premiers résultats ont été obtenus dans le cadre défocalisant, pour des données radiales et $n \geq 3$, [**44**]. Ensuite est venu le cas radial en dimension deux, [**31**] traitant indifféremment les cas focalisant et défocalisant ; enfin, toujours sous l'hypothèse radiale, [**33**] traite le cas focalisant en dimension $n \geq 3$.

Ces derniers travaux trouvent une grande partie de leur inspiration dans la conjecture similaire formulée pour l'équation dite d'énergie critique. Dans ce cadre (par exemple l'équation à nonlinéarité quintique en dimension trois d'espace), [**5**] montre l'existence globale et la diffusion pour des données radiales dans le cas défocalisant, en introduisant une méthode d'induction sur l'énergie ; [**12**] obtient le cas général (non radial) en remplaçant l'utilisation d'estimations espace-temps à poids de [**35**] par des estimations espace-temps d'auto-corrélation de la densité de masse ([**11**]). L'utilisation d'estimations espace-temps de type Morawetz restreint l'étude au cas défocalisant. Le cas focalisant est abordé pour la première fois, dans le cadre radial, dans [**27**], qui bouleverse la méthodologie existante en introduisant une méthode de concentration-compacité :

- en tirant parti d'une robuste théorie de Cauchy (autorisant des perturbations autour de « grandes » solutions sous contrôle) et des décompositions en profils liées au défaut de compacité de l'injection de Sobolev critique (dans [**29**] pour l'énergie critique, voir également [**38**] puis [**30**] et [**3**] pour l'équation de Schrödinger de masse critique), on construit une solution minimale qui ne diffuse pas ;
- on montre (dans un esprit proche de [**38**]) qu'une telle solution minimale est compacte modulo le groupe de symétrie naturel associé à l'équation (ce qui permet, entre autre, de ré-extraire une solution minimale « normalisée » dans les paramètres de défaut de compacité).
- On montre qu'une telle solution minimale ne peut être que la solution nulle (un théorème de rigidité de type Liouville) ; c'est généralement dans cette étape (cruciale !) que les restrictions éventuelles (caractère radial) apparaissent, en lien avec les outils ad hoc utilisés pour obtenir une contradiction.

Remarque 0.2. — Il convient de remarquer que c'est d'abord pour l'équation d'énergie critique pour les ondes défocalisantes que les décompositions en profils ont montré leur utilité dans l'étude de l'asymptotique à grand temps ([**1**],[**2**]). Dans le cadre des ondes défocalisantes, l'existence globale et la diffusion avaient été préalablement établies par des arguments directs reposant sur la vitesse finie de propagation et sur une formule de monotonie à la Morawetz (qui, contrairement au cas de Schrödinger, est valide pour des données d'énergie finie). A contrario, la résolution de la conjecture ad hoc dans le cas focalisant dans [**28**] donne une autre illustration de l'efficacité de la méthode concentration/compacité/rigidité.

Cette révolution dans la façon d'aborder ces questions est en grande partie responsable de la résolution à un rythme accéléré de la conjecture précitée. Dans [**45**] (voir également [**30**] pour un résultat antérieur, en dimensions $n = 1, 2$, contenant déjà l'important concept de solution minimale et de sa compacité), l'existence et la compacité des solutions minimales pour l'équation de Schrödinger de masse critique est établie en toute dimension, et les auteurs effectuent de plus une normalisation des solutions minimales qui ne laisse plus que le théorème de rigidité à démontrer pour mettre un point final à l'histoire. Cependant, un ingrédient manquait encore en basse dimension ($n = 1, 2$), où les estimations de type Morawetz précédemment citées n'existaient pas (et l'utilisation du viriel peu exploré). Un analogue de [**11**] est alors démontré simultanément et indépendamment dans [**40**] et [**8**] (voir aussi [**9**] pour une estimation moins précise, pour $n = 1$, mais finalement suffisante) ; l'identité