352

ASTÉRISQUE

2013

SÉMINAIRE BOURBAKI
VOLUME 2011/2012
EXPOSÉS 1043-1058

(1043) *Restriction de représentations et projections d'orbites coadjointes*

Michel BRION

SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE
Publié avec le concours du CENTRE NATIONAL DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

Séminaire BOURBAKI Novembre 2011
64e année, 2011-2012, n° 1043, p. 1 à 33

RESTRICTION DE REPRÉSENTATIONS ET PROJECTIONS D'ORBITES COADJOINTES [d'après Belkale, Kumar et Ressayre]

par **Michel BRION**

1. LE PROBLÈME DE LA RESTRICTION POUR LES GROUPES DE LIE COMPACTS CONNEXES

1.1. Introduction

Soient K un groupe de Lie compact connexe et L un sous-groupe fermé connexe. Le problème considéré dans cet exposé est de *déterminer les représentations irréductibles (continues, complexes) de L qui apparaissent dans la restriction d'une représentation irréductible de K.*

En théorie, ce problème a une solution complète : rappelons que les représentations irréductibles de K sont paramétrées par les poids dominants. Notons Λ_K^+ l'ensemble de ces poids, et $V_K(\lambda)$ le K-module simple de plus haut poids $\lambda \in \Lambda_K^+$. Définissons de même Λ_L^+ et $V_L(\mu)$; on a alors un isomorphisme de L-modules

$$\operatorname{Res}_L^K V_K(\lambda) \cong \bigoplus_{\mu \in \Lambda_L^+} m(\mu, \lambda)\, V_L(\mu)$$

où les multiplicités $m(\mu, \lambda)$ sont des entiers naturels uniquement déterminés. En notant $\chi_K(\lambda)$ le caractère de $V_K(\lambda)$ et $\chi_L(\mu)$ celui de $V_L(\mu)$, on obtient

$$m(\mu, \lambda) = \dim \operatorname{Hom}^L(V_L(\mu), \operatorname{Res}_L^K V_K(\lambda)) = \int_L \chi_K(\lambda)\, \overline{\chi_L(\mu)}\, dl$$

où dl désigne la mesure de Haar de L, normalisée de sorte que $\int_L dl = 1$. Grâce aux formules des caractères et d'intégration de Weyl, on peut donc exprimer la fonction $(\mu, \lambda) \mapsto m(\mu, \lambda)$ en termes de données combinatoires associées à K et L. Cependant, la formule ainsi obtenue ([**14**, Lem. 3.1]) ne permet que rarement de caractériser les couples (λ, μ) tels que $m(\mu, \lambda) \neq 0$, comme l'illustrent les exemples suivants.

Exemple 1.1. — Prenons pour L un tore maximal T de K. Soit Λ le groupe des caractères de T ; alors $\Lambda^+ := \Lambda_K^+$ est l'intersection du groupe des poids $\Lambda = \Lambda_T^+$ et de la chambre positive C dans l'espace vectoriel réel $\Lambda_\mathbb{R} := \Lambda \otimes_\mathbb{Z} \mathbb{R}$. De plus, $m(\mu, \lambda)$ est la multiplicité du poids μ dans $V_K(\lambda) =: V(\lambda)$.

La formule des caractères de Weyl se réécrit sous la forme

$$m(\mu, \lambda) = \sum_{w \in W} \varepsilon(w)\, \mathfrak{P}(w(\lambda + \rho) - (\mu + \rho))$$

où on note W le groupe de Weyl, $\varepsilon : W \to \{\pm 1\}$ le déterminant (pour la représentation de W dans $\Lambda_\mathbb{R}$), ρ la demi-somme des racines positives, et $\mathfrak{P}$ la fonction de partitions en racines positives ([**9**, Ch. VIII, §9, Prop. 1]). Ceci exprime $m(\mu, \lambda)$ comme une somme alternée d'entiers positifs, en général très grands.

Cependant, l'ensemble des poids de $V(\lambda)$ admet une description directe très simple : c'est l'intersection du translaté $\lambda + \Lambda_R$ où Λ_R désigne le sous-groupe de Λ engendré par les racines, et de l'enveloppe convexe $\mathrm{Conv}(W\lambda)$ de l'orbite de λ par W ([**9**, Ch. VIII, §7, Prop. 5 et Exer. 1]).

Lorsque K est semi-simple, le polytope $\mathrm{Conv}(W\lambda)$ est formé des $\mu \in \Lambda_\mathbb{R}$ qui sont solutions du système d'inéquations linéaires

$$(\mu, w\varpi_i) - (\lambda, \varpi_i) \leq 0 \quad (i = 1, \ldots, r,\ w \in W/W_i)$$

où $\varpi_1, \ldots, \varpi_r$ désignent les poids fondamentaux, W_i le groupe d'isotropie de ϖ_i dans W, et $(-,-)$ la forme bilinéaire symétrique sur $\Lambda_\mathbb{R}$ provenant de la forme de Killing. Si de plus la représentation de K dans $V(\lambda)$ a un noyau fini, ces inéquations forment un système minimal : elles sont deux à deux non équivalentes, et chacune définit une face de codimension 1 de $\mathrm{Conv}(W\lambda)$.

Exemple 1.2. — Considérons l'inclusion diagonale de K dans $K \times K$. Avec les notations de l'exemple précédent, les $K \times K$-modules simples ne sont autres que les produits tensoriels $V(\lambda) \otimes V(\mu)$ où $\lambda, \mu \in \Lambda^+$. Les multiplicités $m(\nu, \lambda, \mu)$ sont classiquement notées $c_{\lambda,\mu}^\nu$ et appelées *coefficients de Littlewood-Richardson* ; on a donc un isomorphisme de K-modules

$$V(\lambda) \otimes V(\mu) \cong \bigoplus_{\nu \in \Lambda^+} c_{\lambda,\mu}^\nu V(\nu).$$

On déduit de la formule des caractères de Weyl l'identité

$$c_{\lambda,\mu}^\nu = \sum_{(w,w') \in W \times W} \varepsilon(ww')\, \mathfrak{P}(w(\lambda + \rho) + w'(\mu + \rho) - (\nu + 2\rho))$$

([**9**, Ch. VIII, §9, Prop. 2]) où le membre de droite est encore une somme alternée d'entiers positifs. Par ailleurs, les $c_{\lambda,\mu}^\nu$ se déterminent de façon combinatoire, par la règle de Littlewood-Richardson lorsque K est le groupe unitaire U_n ([**27**, I.9]), et par le « modèle des chemins » pour K arbitraire ([**26**]).

En notant ν^* le plus haut poids du G-module simple dual $V(\nu)^*$, on obtient

$$c_{\lambda,\mu}^{\nu^*} = \dim(V(\lambda) \otimes V(\mu) \otimes V(\nu))^G.$$

En particulier, $c_{\lambda,\mu}^{\nu^*}$ est symétrique en λ, μ et ν. Posons

$$\mathrm{LR}(K) := \{(\lambda,\mu,\nu) \in (\Lambda^+)^3 \mid c_{\lambda,\mu}^{\nu^*} \neq 0\}.$$

On verra en 2.1 que $\mathrm{LR}(K)$ est un sous-monoïde de type fini de $(\Lambda^+)^3$, et en 2.2 que le sous-groupe de Λ^3 engendré par $\mathrm{LR}(K)$ est formé des (λ,μ,ν) tels que $\lambda+\mu+\nu \in \Lambda_R$.

Lorsque $K = \mathrm{U}_n$, on pose $\mathrm{LR}(K) := \mathrm{LR}_n$; on identifie les poids dominants aux suites décroissantes $(\lambda_1 \geq \ldots \geq \lambda_n)$ formées d'entiers relatifs. Une description récursive de LR_n est obtenue par la combinaison de travaux de Klyachko ([**21**]) et de Knutson et Tao ([**23**]) : $(\lambda,\mu,\nu) \in \mathrm{LR}_n$ si et seulement si on a l'égalité

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i + \sum_{j=1}^{n} \mu_j + \sum_{k=1}^{n} \nu_k = 0$$

et les inégalités

$$\sum_{a\in A} \lambda_a + \sum_{b\in B} \mu_b + \sum_{c\in C} \nu_c \leq 0$$

pour tous les sous-ensembles A, B, C de $\{1,\ldots,n\}$ qui ont le même nombre r d'éléments (où $r = 1,\ldots,n-1$) et qui satisfont

$$(\lambda(A), \lambda(B), \lambda(C) - (n-r)^r) \in \mathrm{LR}_r$$

où $\lambda(A) := (n-r+1-a_1,\ldots,n-a_r)$ lorsque $A = (a_1 < \cdots < a_r)$, et où on pose $(n-r)^r := (n-r,\ldots,n-r)$. Knutson, Tao et Woodward ont montré que les inéquations pour lesquelles $c_{\lambda(A),\lambda(B)}^{(c_r-r,\ldots,c_1-1)} = 1$ forment un système minimal ([**24**, Sec. 6]).

Pour un groupe K arbitraire, le « monoïde de Littlewood-Richardson » $\mathrm{LR}(K)$ est en général inconnu. Mais le cône qu'il engendre est convexe, polyédral et rationnel, et on sait le décrire par des inéquations ; le résultat le plus fin est dû à Belkale et Kumar ([**4**]) après de nombreux travaux antérieurs. La mystérieuse condition sur les triplets d'indices (A, B, C) s'interprète et se généralise en termes de calcul de Schubert.

Plus généralement, le monoïde associé de façon analogue au problème de la restriction est de type fini ; les inéquations minimales du cône qu'il engendre ont été obtenues par Ressayre dans l'article [**32**]. Après quelques préliminaires de théorie géométrique des invariants, on exposera une partie de cet article, pour aboutir à la description du « cône de la restriction » (théorème 4.9) et, en particulier, du « cône de Littlewood-Richardson » (théorèmes 4.10 et 4.11). On terminera par une brève présentation des résultats de [**4**], ainsi que de travaux ultérieurs et de questions ouvertes.

1.2. Projection d'orbites coadjointes

Un lien entre restriction de représentations et projection d'orbites coadjointes a été découvert par Heckman ([**14**]), puis généralisé par Guillemin et Sternberg ([**13**]) dans le cadre de la géométrie hamiltonienne. Pour présenter ce lien, introduisons quelques notations.

Le groupe K opère dans son algèbre de Lie $\mathfrak{k}$ par la représentation adjointe ; on note $\mathfrak{k}^*$ l'espace de la représentation duale, appelée *coadjointe*. On définit de même $\mathfrak{l}$ et $\mathfrak{l}^*$. L'inclusion de $\mathfrak{l}$ dans $\mathfrak{k}$ se transpose en la projection

$$p : \mathfrak{k}^* \to \mathfrak{l}^*$$

qui est équivariante relativement à L. Soient T_K un tore maximal de K, et $\mathfrak{t}_K$ son algèbre de Lie ; alors le groupe Λ_K des caractères de T s'identifie à un réseau de l'espace vectoriel réel $\mathfrak{t}_K^*$, et ce dernier, au sous-espace de $\mathfrak{k}^*$ formé des points fixes de T. On identifie ainsi la chambre $C_K \subset \mathfrak{t}_K^*$ à un domaine fondamental pour l'action de K dans $\mathfrak{k}^*$; on a de même la chambre $C_L \subset \mathfrak{t}_L^* \subset \mathfrak{l}^*$.

THÉORÈME 1.3. — *Soient $\lambda \in C_K$ et $\mathcal{O} = K\lambda$ son orbite dans $\mathfrak{k}^*$. La projection $p(\mathcal{O})$ rencontre C_L suivant un polytope convexe, rationnel si λ l'est. Sous cette hypothèse, les points rationnels de ce polytope ne sont autres que les $\mu \in C_L$ tels qu'il existe un entier $n \geq 1$ qui satisfait aux conditions suivantes : $n\lambda \in \Lambda_K^+$, $n\mu \in \Lambda_L^+$ et $m(n\mu, n\lambda) \neq 0$.*

Preuve (esquisse). — La variété différentielle compacte $\mathcal{O}$ est munie d'une structure symplectique invariante par K, pour laquelle l'inclusion dans $\mathfrak{k}^*$ est l'application moment ; la projection $p : \mathcal{O} \to \mathfrak{l}^*$ est donc l'application moment pour l'action de L. La première assertion résulte alors d'un théorème général de convexité ([**19**, Th. 2.1]). Les autres assertions seront démontrées à la suite du lemme 3.1.

Exemple 1.1 (suite) — Pour la projection $p : \mathfrak{k}^* \to \mathfrak{t}^*$, le théorème 1.3 entraîne que l'image de l'orbite $K\lambda$ est l'enveloppe convexe des $w\lambda$ où $w \in W$. Ce résultat est dû à Kostant ([**25**, Th. 4.1]) par une méthode différente.

Lorsque $K = \mathrm{U}_n$, le K-module $\mathfrak{k}^*$ s'identifie à l'espace H_n des matrices hermitiennes de taille n, dans lequel U_n opère par conjugaison ; la chambre C est l'ensemble des matrices diagonales à coefficients réels décroissants, c'est-à-dire des spectres (ordonnés) des matrices hermitiennes. Les orbites coadjointes sont formées des matrices hermitiennes ayant un spectre donné, et la projection p associe à chaque matrice la suite de ses coefficients diagonaux. On retrouve ainsi un résultat de Schur et Horn : *les suites des coefficients diagonaux des conjugués d'une matrice hermitienne A forment un polytope convexe dont les sommets sont le spectre de A et ses images par les permutations.*