352

ASTÉRISQUE

2013

SÉMINAIRE BOURBAKI
VOLUME 2011/2012
EXPOSÉS 1043-1058

(1044) *Stabilité orbitale pour le système de Vlasov-Poisson gravitationnel*

Clément MOUHOT

SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE
Publié avec le concours du CENTRE NATIONAL DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

Séminaire BOURBAKI Novembre 2011
64e année, 2011-2012, nº 1044, p. 35 à 82

STABILITÉ ORBITALE POUR LE SYSTÈME DE VLASOV-POISSON GRAVITATIONNEL [d'après Lemou-Méhats-Raphaël, Guo, Lin, Rein et al.]

par **Clément MOUHOT**

INTRODUCTION

Cet exposé est consacré aux avancées mathématiques récentes sur un problème célèbre de l'astrophysique, la stabilité de modèles galactiques. La question se formule très simplement : si l'on considère un ensemble d'un très grand nombre d'étoiles en interaction gravitationnelle[(1)] dont la cohérence est assurée par leur attraction réciproque et que l'on considère en première approximation comme un système fermé, quelles sont les répartitions statistiques stables au cours du temps ? Autrement dit, quelles sont les configurations de galaxies observables dans notre univers ? On néglige ici les effets relativistes et on se place dans le cadre de la mécanique classique.

Ce problème semble à première vue tout autant insoluble que le problème à N corps de Newton. Comment formuler des prédictions à long terme sur un système de 10^{11} corps[(2)] alors même que l'on ne sait pas résoudre de manière satisfaisante le problème à 3 corps ! C'est ici que la mécanique statistique entre en jeu. En suivant les idées de Maxwell et de Boltzmann, on peut tenter de décrire de manière statistique l'évolution de nos N corps lorsque N tend vers l'infini et que les corps sont suffisamment « peu corrélés », à travers une équation aux dérivées partielles non-linéaire sur la répartition d'un corps typique.

Cette approche a d'abord été appliquée aux cas de gaz collisionnels pour donner la célèbre équation de Boltzmann. Cependant, les collisions entre étoiles dans une galaxie sont quasi-absentes et l'interaction se fait essentiellement à distance *via* le champ gravitationnel. Dans les années 1910 et 1930, Jeans puis Vlasov découvrent comment effectuer la limite $N \to +\infty$ dans ce cas « non-collisionnel » afin d'obtenir

(1) Le rôle joué par les planètes dans la dynamique est négligé au premier ordre car leurs masses sont bien plus petites que celles des étoiles.
(2) C'est l'ordre de grandeur du nombre d'étoiles dans notre galaxie.

des équations aux dérivées partielles non-linéaires dites de « champ moyen ». La plus célèbre d'entre elles est l'équation de Vlasov-Poisson, dont nous allons étudier ici la version gravitationnelle (8)-(9). Cette équation de transport non-linéaire décrit avec une excellente précision l'évolution de systèmes stellaires sur de grandes échelles de temps.

Ainsi, lorsque le nombre de corps est grand et que les corrélations sont faibles, on peut espérer formuler des prédictions de stabilité à partir de l'étude de l'équation de Vlasov-Poisson. C'est le physicien russe Antonov [**4, 3**] qui, le premier, découvre comment résoudre le problème de la stabilité, mais uniquement dans un cadre linéarisé. Il démontre ainsi la *stabilité linéarisée des modèles galactiques sphériques et monotones en l'énergie microscopique pour des petites perturbations.* Cependant, l'équation de Vlasov-Poisson est réversible en temps, non dissipative, et ses solutions montrent des oscillations en temps grand ; rien ne garantit *a priori* que l'étude de stabilité linéarisée d'Antonov implique la stabilité non-linéaire recherchée. C'est ce problème mathématique que nous appellerons **conjecture de stabilité non-linéaire** à la Antonov. Durant les cinquante dernières années, l'analyse mathématique des *équations cinétiques* de Boltzmann et Vlasov a connu un fort développement. Cette conjecture de stabilité non-linéaire a été récemment démontrée par Lemou, Méhats et Raphaël [**54, 56, 57**], suivant des travaux précurseurs de Dolbeault, Guo, Hadžić, Lin, Rein, Sánchez, Soler, Wan, Wolansky ainsi que Lemou, Méhats et Raphaël [**81, 87, 82, 27, 28, 29, 30, 32, 33, 21, 77, 35, 34, 31, 49, 53, 51**].

Dans cet exposé, nous proposerons tout d'abord dans la section 1 une introduction mathématique au problème, en expliquant l'origine du système de Vlasov-Poisson gravitationnelle à partir du problème à N corps. Nous rappellerons ensuite dans la section 2 les principales propriétés mathématiques de ce système d'équations. Puis nous aborderons dans la section 3 la résolution du problème linéarisé. Enfin nous traiterons dans la section 4 de la question de la stabilité non-linéaire. Nous retracerons l'histoire des différentes méthodes mathématiques développées pour attaquer ce problème, puis nous détaillerons le théorème central du travail [**57**] de Lemou, Méhats et Raphaël, en donnant un schéma détaillé de preuve. Nous conclurons finalement avec des commentaires et questions ouvertes.

L'auteur remercie Y. Guo, P.-E. Jabin, M. Lemou, F. Méhats, Z. Lin, P. Raphaël et J. Soler pour les échanges par courriel ou discussions durant la préparation de cet exposé, ainsi que S. Martin pour ses relectures et commentaires sur ce texte.

1. PROBLÈME À N CORPS ET SYSTÈME DE VLASOV-POISSON

1.1. Le problème à N corps de Newton

On écrit le problème à N corps, pour des interactions binaires et sans champ extérieur, et en normalisant toutes les masses à 1 :

$$(1) \qquad 1 \leq i \leq N, \quad \begin{cases} x_i'(t) = v_i(t) = \dfrac{\partial H}{\partial v_i}(X(t), V(t)), \\ v_i'(t) = -\displaystyle\sum_{i \neq j} \nabla_x \psi(x_i - x_j) = -\dfrac{\partial H}{\partial x_i}(X(t), V(t)) \end{cases}$$

où ψ est le potentiel de l'interaction. Ces équations sont écrites sous forme hamiltonienne pour le hamiltonien

$$(2) \qquad H(X, V) = \sum_{i=1}^{N} \frac{|v_i|^2}{2} + \sum_{i<j} \psi(x_i - x_j)$$

où $X = (x_1, \ldots, x_N)$, $V = (v_1, \ldots, v_d)$ et chaque $x_i, v_i \in \mathbb{R}^3$.

Même si ce système d'équations différentielles ordinaires non-linéaires couplées peut être aussi bien utilisé pour décrire l'évolution d'objets infiniment petits, comme des molécules, ou infiniment grands, comme des étoiles, nous parlerons ici de *point de vue microscopique et trajectoriel* et nous appellerons ψ le *potentiel d'interaction microscopique* et H le *hamiltonien microscopique.*

1.2. La limite de Vlasov ou limite « de champ moyen »

Si l'on considère l'évolution de la distribution $f^{(N)} = f^{(N)}(t, X, V)$ de nos N corps dans l'espace des phases, des positions et vitesses, on obtient l'*équation de Liouville à N corps*, qui est le point de vue statistique sur ce système :

$$(3) \qquad \partial_t f^{(N)} + \sum_{i=1}^{N} \left(\frac{\partial H}{\partial v_i} \cdot \frac{\partial f^{(N)}}{\partial x_i} - \frac{\partial H}{\partial x_i} \cdot \frac{\partial f^{(N)}}{\partial v_i} \right) = \partial_t f^{(N)} + \left\{ f^{(N)}, H \right\} = 0$$

où $\{\cdot, \cdot\}$ désigne le crochet de Poisson sur $(\mathbb{R}^3)^N \times (\mathbb{R}^3)^N$:

$$\{f^{(N)}, g^{(N)}\} = \nabla_X f^{(N)} \cdot \nabla_V g^{(N)} - \nabla_X g^{(N)} \cdot \nabla_V f^{(N)}.$$

Les solutions sont données par $f^{(N)}(t, X, V) = f^{(N)}(S_{-t}(X, V))$ où S_t désigne le flot solution des équations de Newton.

Cette résolution par la *méthode des caractéristiques* implique la conservation du signe de $f^{(N)}$:

$$f^{(N)}(0, X, V) \geq 0 \quad \Longrightarrow \quad f^{(N)}(t, X, V) \geq 0$$

mais aussi, du fait que le jacobien de S_t vaut 1 pour tout t [3], de la masse

$$\int_{(\mathbb{R}^3\times\mathbb{R}^3)^N} f^{(N)}(t,X,V)\,\mathrm{d}X\,\mathrm{d}V = \int_{(\mathbb{R}^3\times\mathbb{R}^3)^N} f^{(N)}(0,X,V)\,\mathrm{d}X\,\mathrm{d}V$$

et plus généralement de toute « fonctionnelle de Casimir »

$$\int_{(\mathbb{R}^3\times\mathbb{R}^3)^N} \mathscr{C}\left(f^{(N)}(t,X,V)\right)\,\mathrm{d}X\,\mathrm{d}V = \int_{(\mathbb{R}^3\times\mathbb{R}^3)^N} \mathscr{C}\left(f^{(N)}(0,X,V)\right)\,\mathrm{d}X\,\mathrm{d}V$$

pour $\mathscr{C} \in C^1(\mathbb{R}_+,\mathbb{R}_+)$, $\mathscr{C}(0) = 0$. Une fonctionnelle de Casimir désigne pour un système hamiltonien une fonctionnelle qui annule le crochet de Poisson avec toute autre fonctionnelle le long des trajectoires (voir par exemple [**5, 6**]).

Afin de comprendre l'évolution à travers un système réduit, on introduit la distribution d'une particule $f = f^{(1)}$:

$$f(t,x,v) := \int_{(\mathbb{R}^3\times\mathbb{R}^3)^{N-1}} f^{(N)}(t,X,V)\,\mathrm{d}x_2\,\mathrm{d}x_3\,\ldots\,\mathrm{d}x_N\,\mathrm{d}v_2\,\mathrm{d}v_3\,\ldots\,\mathrm{d}v_N$$

qui est donnée par la marginale de la distribution complète à N corps $f^{(N)}$. On calcule alors l'équation vérifiée par cette distribution à une particule

$$\frac{\partial f}{\partial t} + v\cdot\nabla_x f - (N-1)\int_{\mathbb{R}^3\times\mathbb{R}^3} \nabla_x\psi(x-y)\cdot\nabla_v f^{(2)}(x,y,v,v_*)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}v_* = 0. \tag{4}$$

Cette équation dépend bien sûr de la seconde marginale (distribution à deux particules)

$$f^{(2)}(t,x_1,x_2,v_1,v_2) := \int_{(\mathbb{R}^3\times\mathbb{R}^3)^{N-2}} f^{(N)}\,\mathrm{d}x_3\,\mathrm{d}x_4\,\ldots\,\mathrm{d}x_N\,\mathrm{d}v_3\,\mathrm{d}v_4\,\ldots\,\mathrm{d}v_N$$

qui contient de l'information sur les corrélations du système. De la même façon, on pourrait définir les k-marginales $f^{(k)}$ pour $1 \le k \le N$, et l'ensemble des équations couplées sur toutes ces marginales constitue la *hiérarchie BBGKY* (Bogoliubov-Born-Green-Kirkwood-Yvon).

La limite de champ moyen consiste :

– d'une part à considérer que chaque interaction binaire est d'ordre $O(1/N)$, soit

$$\psi = \psi_N = \frac{\bar{\psi}}{N},$$

ce qui signifie que l'influence d'une étoile sur une autre étoile est négligeable à l'échelle de l'ensemble de la galaxie, mais que l'action de l'ensemble de la galaxie sur une étoile donnée est d'ordre $O((N-1)/N) = O(1)$;

[3] Ce qui est une version du célèbre théorème de Liouville dans ce contexte.