352 ASTÉRISQUE

2013

SÉMINAIRE BOURBAKI
VOLUME 2011/2012
EXPOSÉS 1043-1058

(1055) *La conjecture des sous-groupes de surfaces*

Nicolas BERGERON

SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE

Publié avec le concours du CENTRE NATIONAL DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

Séminaire BOURBAKI Juin 2012
64^e année, 2011-2012, n° 1055, p. 429 à 458

LA CONJECTURE DES SOUS-GROUPES DE SURFACES [d'après Jeremy Kahn et Vladimir Markovic]

par **Nicolas BERGERON**

Une variété hyperbolique est une variété riemannienne, lisse, connexe, complète et de courbure sectionnelle constante égale à -1. On note $\mathbf{H}_3$ l'unique — à isométrie près — variété hyperbolique simplement connexe de dimension 3. Dans ce rapport, on utilise le modèle du demi-espace $\mathbf{H}_3 = (\mathbf{C} \times \mathbf{R}_+^*, \frac{|dz|^2+dt^2}{t^2})$. L'extension de Poincaré de l'action par homographies de $\mathrm{PSL}_2(\mathbf{C})$ sur $\mathbf{P}_1(\mathbf{C})$ fournit une action de $\mathrm{PSL}_2(\mathbf{C})$ sur $\mathbf{H}_3$ par isométries et donc — *via* la différentielle — une action sur le fibré des repères. Cette action est simplement transitive ; le choix d'un point base $p_0 = (0,1) \in \mathbf{H}_3$ et de deux vecteurs tangents unitaires orthogonaux $\vec{u}_0 = (0,1)$ et $\vec{n}_0 = (1,0)$ permet donc d'identifier $\mathrm{PSL}_2(\mathbf{C})$ au fibré des repères de $\mathbf{H}_3$ *via* l'application $g \mapsto g \cdot (p_0, \vec{u}_0, \vec{n}_0, \vec{u}_0 \wedge \vec{n}_0)$.

Sauf mention contraire, dans tout ce rapport le terme *variété* désignera dorénavant une variété lisse, compacte, connexe, orientable et sans bord, et *surface* une variété de dimension 2. Un choix indifférent de point base est effectué lorsque l'on parle du groupe fondamental d'un espace connexe par arc, et un choix approprié de points bases est effectué lorsque l'on parle de morphisme entre groupes fondamentaux.

1. INTRODUCTION : LA CONJECTURE VH ET SES AMIES

Soit M une variété hyperbolique de dimension 3. On conjecture tour à tour les énoncés suivants (voir [**37**, p. 380]) :

(1) Le groupe fondamental de M contient un sous-groupe isomorphe au groupe fondamental d'une surface de genre au moins 2.

(2) La variété M possède un revêtement fini qui contient une surface *plongée* de sorte que l'inclusion induise une injection au niveau des groupes fondamentaux.

(3) La variété M possède un revêtement fini dont le premier nombre de Betti est non nul.

(4) Pour tout entier n, la variété M possède un revêtement fini dont le premier nombre de Betti est supérieur à n.

(5) La variété M possède un revêtement fini dont le groupe fondamental se surjecte sur un groupe libre de rang 2.

(6) La variété M possède un revêtement fini qui fibre sur le cercle.

Il n'est pas difficile de vérifier que[1]

$$\begin{array}{ccc} (5) \Rightarrow (4) \Rightarrow & (3) & \Rightarrow (2) \Rightarrow (1) \\ & \Uparrow & \\ & (6) & \end{array}$$

La conjecture VH (pour virtuellement Haken) est l'énoncé (2). L'objet de ce rapport est d'expliquer les grandes idées de la démonstration, par Jeremy Kahn et Vladimir Markovic [**22**], de la conjecture (1) :

THÉORÈME 1.1 (Kahn-Markovic). — *Soit M une variété hyperbolique de dimension 3 ; alors il existe une surface S de genre $g \geq 2$ et une injection*

$$\pi_1 S \hookrightarrow \pi_1 M.$$

Commentaires. — 1. Dans une prépublication récente, Dani Wise démontre notamment l'implication (2) $\Rightarrow$ (6). Son résultat est plus général, nous revenons sur ses travaux au §6.2. Tout récemment Ian Agol a fait circuler une prépublication dans laquelle, en se reposant sur les travaux de Wise et de Kahn et Markovic, il démontre les six conjectures ci-dessus.

2. Dans le cas où M est *arithmétique*, le théorème 1.1 est dû à Marc Lackenby [**28**].

3. Dans le cas où M est une variété hyperbolique de dimension 3 de volume fini mais *non compacte*, Daryl Cooper, Darren Long et Alan Reid [**12**] démontrent (5) et les résultats de Wise s'appliquent encore pour démontrer (6).

4. Dans un cadre plus général, Mikhail Gromov pose :

QUESTION 1.2. — *Soit Γ un groupe hyperbolique au sens de Gromov qui ne contient pas un sous-groupe libre d'indice fini. Le groupe Γ contient-il un sous-groupe isomorphe au groupe fondamental d'une surface de genre au moins 2 ?*

On renvoie à [**11**] pour des travaux récents en lien avec cette question.

---

[1] L'implication (2) $\Rightarrow$ (1) est la plus délicate, voir [**20**, Lem. 6.6].

2. CONSTRUCTION D'UNE SURFACE À PARTIR DE PANTALONS

Dans toute cette partie, $M = \Gamma\backslash\mathbf{H}_3$ est une variété hyperbolique de dimension 3 uniformisée, où Γ est un sous-groupe discret et sans torsion du groupe $\mathrm{PSL}_2(\mathbf{C})$. De cette manière, on identifie le fibré des repères de M à $\Gamma\backslash\mathrm{PSL}_2(\mathbf{C})$.

Définition 2.1. — *Soit S une surface dont on fixe un revêtement universel $\widetilde{S} \to S$, de groupe de revêtement $\pi_1(S)$. Une structure de* $\mathrm{PSL}_2(\mathbf{C})$-surface *sur S est la donnée d'une immersion $F : \widetilde{S} \to \mathbf{H}_3$ et d'une représentation $\rho \in \mathrm{Hom}(\pi_1(S), \mathrm{PSL}_2(\mathbf{C}))$ telles que F soit équivariante relativement à ρ. Deux structures de $\mathrm{PSL}_2(\mathbf{C})$-surfaces (F_1, ρ_1) et (F_2, ρ_2) sur S sont* équivalentes *s'il existe un élément g de $\mathrm{PSL}_2(\mathbf{C})$ tel que $F_2 = gF_1$ et $\rho_2 = g\rho_1 g^{-1}$.*

Par analogie avec la notion de (G, X)-structure, on dira que F est l'*application développante* et ρ le *morphisme d'holonomie* de la structure de $\mathrm{PSL}_2(\mathbf{C})$-surface. Le groupe de surface du théorème 1.1 sera obtenu comme groupe de monodromie d'une structure de $\mathrm{PSL}_2(\mathbf{C})$-surface sur une surface S immergée dans M. On aura également besoin de considérer des surfaces à bord ; on demande alors que l'application développante envoie chaque composante de bord sur une géodésique.

2.1. L'espace des futals

Fixons Π un pantalon orienté (à bord). On numérote C_1, C_2 et C_3 les composantes de bord orientées de Π et on choisit un élément $c_n \in \pi_1(\Pi)$ dans la classe de conjugaison correspondant à chaque composante de bord C_n pour $n = 1, 2, 3$, de sorte que

$$c_1 c_2 c_3 = \mathrm{id}.$$

Rappelons qu'un élément $A \in \mathrm{PSL}_2(\mathbf{C})$ — vu comme isométrie de $\mathbf{H}_3$ — a une *longueur de translation complexe* $\ell(A) \in (\mathbf{R}_+^* + i\mathbf{R})/2i\pi\mathbf{Z}$, telle que[(2)] $\mathrm{trace}(A) = \pm 2\cosh(\ell(A)/2)$.

Étant donné un morphisme $\rho : \pi_1(\Pi) \to \mathrm{PSL}_2(\mathbf{C})$, on note $\ell_n = \ell_n(\rho)$ les longueurs de translation complexes des $\rho(c_n)$ pour $n = 1, 2, 3$.

Kourouniotis [**26**, Prop. 1.6] montre que trois nombres complexes $\sigma_n \in (\mathbf{R}_+^* + i\mathbf{R})/2i\pi\mathbf{Z}$ où $n = 1, 2, 3$, déterminent deux hexagones gauches à angles droits isométriques, mais d'orientations opposées, dont trois côtés non-adjacents sont de longueurs complexes $\hat{\sigma}_1$, $\hat{\sigma}_2$, $\hat{\sigma}_3$ pour un choix de $\hat{\sigma}_n \in \{\sigma_n, \sigma_n + i\pi\}$. En recollant ces deux hexagones on

(2) On prendra garde au fait que la trace de A n'est définie qu'au signe près et que la demi-longueur $\ell(A)/2$ n'est définie que modulo $i\pi$.

munit le pantalon Π d'une structure de $\mathrm{PSL}_2(\mathbf{C})$-surface de représentation d'holonomie $\rho : \pi_1(\Pi) \to \mathrm{PSL}_2(\mathbf{C})$ telle que $\ell_n(\rho) = 2\sigma_n$ pour $n = 1, 2, 3$. Réciproquement, si ρ est le morphisme d'holonomie d'une structure de $\mathrm{PSL}_2(\mathbf{C})$-surface sur Π et si les extrémités des axes de translation des $\rho(c_n)$ pour $n = 1, 2, 3$ sont deux à deux distinctes, alors ρ est conjuguée à une représentation d'holonomie associée comme ci-dessus à trois *demi-longueurs* $\sigma_n = \sigma_n(\rho) \in (\mathbf{R}_+^* + i\mathbf{R})/2i\pi\mathbf{Z}$ où $n = 1, 2, 3$.

Remarque 2.2. — 1. Quitte à conjuguer ρ dans $\mathrm{PSL}_2(\mathbf{C})$, on peut supposer que l'axe de translation de $\rho(c_1)$ est la géodésique (orientée) $i\mathbf{R}_+^*$ de $\mathbf{H}_3$ qui va de 0 à l'infini. Les perpendiculaires communes à $i\mathbf{R}_+^*$ et aux axes de translation des $\rho(c_n)$ où $n = 2, 3$, déterminent deux éléments v_- et v_+, de points base p_- et p_+, du fibré unitaire normal à $i\mathbf{R}_+^*$ que l'on numérote de sorte que l'orientation du segment $[p_-, p_+]$ coïncide avec l'orientation de la géodésique $i\mathbf{R}_+^*$. Alors l'homographie $z \mapsto e^{\sigma_1} z$ est l'unique isométrie directe de $\mathbf{H}_3$ qui préserve l'axe $i\mathbf{R}_+^*$ et envoie v_- sur v_+. Cela détermine l'élément $\sigma_1 \in (\mathbf{R}_+^* + i\mathbf{R})/2i\pi\mathbf{Z}$; on procède de même pour σ_2 et σ_3.

2. Toute représentation ρ comme ci-dessus admet un relevé $\tilde\rho$ à $\mathrm{SL}_2(\mathbf{C})$ tel que $\mathrm{trace}(\tilde\rho(c_n)) = -2\cosh\sigma_n$ pour $n = 1, 2, 3$. Les σ_n déterminent la classe de $\mathrm{SL}_2(\mathbf{C})$-conjugaison de $\tilde\rho$.

DÉFINITION 2.3. — (1) *Un* futal *dans M est la classe de conjugaison $\mathbf{\Pi} = [\rho]$ dans Γ d'un morphisme injectif $\rho : \pi_1(\Pi^0) \to \Gamma \subset \mathrm{PSL}_2(\mathbf{C})$ tel que ρ est l'holonomie d'une structure de $\mathrm{PSL}_2(\mathbf{C})$-surface sur Π, les extrémités des axes de translation des $\rho(c_n)$ pour $n = 1, 2, 3$ sont deux à deux distinctes et ρ vérifie*

$$\sigma_n(\rho) = \frac{1}{2}\ell_n(\rho), \quad n = 1, 2, 3. \tag{1}$$

Dans la suite on choisira toujours des représentants $\ell_n \in \mathbf{R}_+^* + i\mathbf{R}$ tels que $-\pi < \mathrm{Im}(\ell_n) \leq \pi$.

(2) *Un* futal marqué *dans M est la donnée $(\mathbf{\Pi}, g^*)$ d'un futal et d'une géodésique fermée orientée g^* dans M qui représente la classe de conjugaison de $\rho(c_n)$ pour un certain $n = 1, 2, 3$.*

On note $\mathscr{P}$ l'ensemble des futals marqués dans M muni de la topologie discrète. Le groupe Γ opère, à gauche diagonalement et par conjugaison, sur Γ^3 et un futal marqué $(\mathbf{\Pi}, g^*)$ est uniquement déterminé par la classe de conjugaison du triplet ordonné $(\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3) = (\rho(c_n), \rho(c_{n+1}), \rho(c_{n+2})) \in \Gamma^3$, où l'entier n, considéré modulo 3, est tel que g^* représente la classe de conjugaison de $\rho(c_n)$. Un tel triplet vérifie en outre la relation

$$\gamma_1\gamma_2\gamma_3 = \mathrm{id} \tag{2}$$