352

ASTÉRISQUE

2013

SÉMINAIRE BOURBAKI
VOLUME 2011/2012
EXPOSÉS 1043-1058

(1056) *Les espaces de Berkovich sont modérés*

Antoine DUCROS

SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE

Publié avec le concours du CENTRE NATIONAL DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

Séminaire BOURBAKI Juin 2012
64e année, 2011-2012, n° 1056, p. 459 à 507

LES ESPACES DE BERKOVICH SONT MODÉRÉS
[d'après Ehud Hrushovski et François Loeser]

par **Antoine DUCROS**

Conventions préalables

Il sera question tout au long de ce texte de *valuations*, pour lesquelles deux notations sont en concurrence : la notation additive et la notation multiplicative. Nous avons opté pour la notation multiplicative, naturelle en géométrie de Berkovich. Une valuation sur un corps k consiste donc en la donnée : d'un groupe abélien ordonné G noté multiplicativement d'élément neutre 1 ; et d'une application $|.|$ de k vers $G_0 := G \cup \{0\}$ (où 0 est absorbant, et plus petit que tout élément de G) telle que $|0| = 0, |1| = 1$, $|ab| = |a| \cdot |b|$ et $|a + b| \leqslant \max(|a|, |b|)$ pour tout $(a, b) \in k^2$; *nous n'exigeons pas que* $|k| = G_0$. L'anneau de la valuation $|.|$ est égal à $\{x \in k, |x| \leqslant 1\}$; on le notera k°. Son idéal maximal est $k^{\circ\circ} := \{x \in k, |x| < 1\}$; son corps résiduel $k^\circ/k^{\circ\circ}$ sera noté $\tilde{k}$. Un *corps valué* est un corps muni d'une valuation ; un *corps ultramétrique* est un corps muni d'une valeur absolue ultramétrique, c'est-à-dire encore d'une valuation à valeurs réelles.

INTRODUCTION

À la fin des années quatre-vingt, Vladimir Berkovich a proposé une nouvelle approche de la géométrie analytique ultramétrique ([**2**], [**3**] ; cf. aussi l'exposé [**11**] de ce séminaire). L'un de ses traits distinctifs est qu'elle fournit des espaces ayant d'excellentes propriétés *topologiques*, qui se sont avérées très utiles pour des raisons techniques, mais aussi psychologiques dans la mesure où elles sont souvent remarquablement conformes à l'intuition classique : par exemple, le disque unité fermé est, dans ce contexte, une partie compacte et à bord non vide de la droite affine.

(*) Durant la préparation de cet exposé, l'auteur était responsable du projet ANR Jeunes Chercheurs Espaces de Berkovich (07-JCJC-0004-CSD5).
L'auteur est membre junior de l'Institut universitaire de France.

La connaissance de ces propriétés topologiques a récemment progressé de manière considérable grâce à l'article [**17**] de Ehud Hrushovski et François Loeser, auquel ce texte est consacré. Avant d'en présenter les grandes lignes, nous allons succinctement exposer l'état de l'art antérieur à sa parution. On peut, grossièrement, classer les propriétés qui étaient connues jusqu'alors en trois catégories.

1) *Celles qui relèvent de la topologie générale.* Les espaces de Berkovich sont localement compacts, localement connexes par arcs, et de dimension topologique finie lorsqu'ils sont compacts. Elles ont été établies par Berkovich lui-même (pour l'essentiel dans [**2**]) aux débuts de la théorie. Leurs preuves reposent sur des arguments très généraux, tel le théorème de Tychonoff, ainsi que sur une étude *explicite* du disque unité.

2) *Celles qui relèvent de la modération*[(1)] *homotopique.* Elles sont là encore dues à Berkovich, qui les a prouvées dans l'article [**4**]. Soit X un espace analytique compact sur un corps ultramétrique complet k. Supposons que X admet un modèle formel polystable $\mathfrak{X}$ sur k°. La combinatoire des singularités de la fibre spéciale $\mathfrak{X} \otimes \widetilde{k}$ de $\mathfrak{X}$ peut être codée par un polytope P de dimension inférieure ou égale à celle de X ; Berkovich démontre, en se ramenant par localisation étale à une situation torique qui se traite à la main, que P est homéomorphe à un fermé de X, sur lequel X se rétracte par déformation.

À l'aide des altérations de de Jong, il en déduit que si la valeur absolue de k n'est pas triviale, tout espace k-analytique lisse est localement contractile ; il montre plus généralement que c'est le cas de tout espace k-analytique *localement isomorphe à un domaine strictement k-analytique d'un espace k-analytique lisse.* Donnons quelques très brèves explications sur les termes employés, en renvoyant le lecteur en quête de définitions détaillées au texte fondateur [**3**] de Berkovich. Les *domaines analytiques* d'un espace analytique X sont des sous-ensembles de X qui ont une structure *canonique* d'espace analytique. Parmi eux, on trouve entre autres les ouverts de X et certains compacts intéressants mais pas, en général, les fermés de Zariski de X (qui peuvent admettre plusieurs structures analytiques, à cause des phénomènes de nilpotence). Quant à l'adverbe « strictement », il fait référence à une condition sur les paramètres de définition. Illustrons ces notions par un exemple : pour tout n-uplet $\mathbf{r} = (r_1, \ldots, r_n)$ de réels strictement positifs, le polydisque fermé $\mathbb{D}_{\mathbf{r}}$ de polyrayon $\mathbf{r}$ est un domaine analytique compact de l'espace affine analytique $\mathbb{A}_k^{n,\mathrm{an}}$, et $\mathbb{D}_{\mathbf{r}}$ est strictement k-analytique si et seulement si les r_i appartiennent à $|k^*|^{\mathbb{Q}}$. Mentionnons

(1) Nous ne chercherons pas ici à définir précisément le terme « modération ». Il est à prendre dans une acception assez vague, dans l'esprit d'*Esquisse d'un programme* : il évoque une certaine forme de finitude, ainsi que l'absence de pathologies.

incidemment que $\mathbb{A}_k^{n,\mathrm{an}}$ est lisse, mais pas $\mathbb{D}_{\mathbf{r}}$ si $n > 0$ car ce dernier a alors un bord non vide.

3) *Celles qui relèvent de la modération en matière de composantes connexes.* Il y en a essentiellement deux, l'une portant sur les « parties semi-algébriques » de l'analytifié d'une variété algébrique, et l'autre sur certaines « familles réelles » d'espaces analytiques.

- *Modération des ensembles semi-algébriques.* Soit X une variété algébrique sur un corps ultramétrique complet k. Une partie V de son analytifié X^{an} est dite *semi-algébrique* si elle peut être définie, localement pour la topologie de Zariski sur X^{an}, par une combinaison booléenne finie d'inégalités de la forme $|f| \bowtie \lambda|g|$, où f et g sont des fonctions polynomiales, où $\lambda \in \mathbb{R}_+$, et où le symbole $\bowtie$ appartient à $\{<, >, \leqslant, \geqslant\}$.

Toute partie semi-algébrique de X^{an} a un nombre fini de composantes connexes, elles-mêmes semi-algébriques. Ce résultat a été établi dans **[10]** par l'auteur(2) ; la preuve repose sur différents résultats difficiles d'algèbre commutative normée, reliant les propriétés d'une algèbre affinoïde à celles de sa réduction, qui sont dus à Grauert et Remmert d'une part (**[13]**), à Bosch d'autre part (**[8]**).

- *Modération en famille réelle.* Soit X un espace analytique compact et soit f une fonction analytique sur X. Pour tout $\varepsilon \geqslant 0$, notons X_ε l'ensemble des $x \in X$ tels que $|f(x)| \geqslant \varepsilon$. Il existe une partition finie de $\mathscr{P}$ de $\mathbb{R}_+$ en intervalles, possédant la propriété suivante : pour tout $I \in \mathscr{P}$ et tout couple $(\varepsilon, \varepsilon')$ d'éléments de I tel que $\varepsilon \leqslant \varepsilon'$, l'application naturelle $\pi_0(X_{\varepsilon'}) \to \pi_0(X_\varepsilon)$ est bijective. Ce théorème a été prouvé par Jérôme Poineau dans **[20]**, à l'aide de deux résultats de désingularisation : le « théorème de la fibre réduite » (forme affaiblie du théorème de réduction semi-stable, démontrée en toute dimension par Bosch, Lütkebohmert et Raynaud dans **[9]**), et un théorème d'élimination de la ramification sauvage, établi par Epp dans **[12]**. Indiquons que le cas particulier où la fonction f est inversible avait été traité antérieurement par Abbes et Saito dans leur travail **[1]** sur la ramification sauvage.

Mentionnons pour conclure ce survol une interprétation conceptuelle de l'espace topologique sous-jacent à un espace analytique — ou à tout le moins de sa cohomologie. Soit k un corps ultramétrique complet, soit k^a une clôture algébrique de k, et soit X une k-variété algébrique. La cohomologie de l'espace topologique $X_{\widehat{k^a}}^{\mathrm{an}}$ a alors tendance à s'identifier de manière Galois-équivariante, lorsque cela a un sens, à la partie *de poids zéro* de la cohomologie « usuelle » de X_{k^a}. Pour plus de précisions, le lecteur intéressé pourra consulter : l'article **[5]** de Berkovich, qui traite le cas d'un corps local, d'un corps de type fini sur son sous-corps premier, et de $\mathbb{C}$ (la valeur absolue dans ces deux derniers cas est *triviale*) ; et les articles **[6]** et **[19]** (le premier de Berkovich,

(2) Dans **[10]** seul le cas des variétés affines est considéré, mais il est immédiat qu'il entraîne le cas général.

le second de Johannes Nicaise), qui traitent le cas du corps $\mathbb{C}((t))$ muni d'une valeur absolue t-adique, en lien avec les familles à un paramètre de variétés complexes.

Les résultats de Hrushovski et Loeser. On peut les résumer en disant qu'ils étendent 2) et 3) à *toutes les situations provenant de la géométrie algébrique (projective).* Plus précisément, soit k un corps ultramétrique complet, soit X une k-variété algébrique *quasi-projective*, et soit V une partie semi-algébrique de X^{an}. Hrushovski et Loeser démontrent entre autres les assertions suivantes.

A) *Modération globale.* Il existe un fermé S de V homéomorphe à un complexe simplicial fini de dimension inférieure ou égale à celle de X, et une rétraction par déformation de V sur S telle que tous les points d'une trajectoire donnée aient même image terminale sur S.
B) *Modération locale.* L'espace topologique V est localement contractile.
C) *Modération en famille algébrique.* Soit Y une k-variété algébrique et soit f un morphisme de X vers Y. L'ensemble des types d'homotopie des fibres de $f^{\mathrm{an}}|_V : V \to Y^{\mathrm{an}}$ est fini.
D) *Modération en famille réelle.* Soit $g \in \mathscr{O}_X(X)$. Pour tout $\varepsilon \geqslant 0$, notons V_ε l'ensemble des $x \in V$ tels que $|g(x)| \geqslant \varepsilon$. Il existe une partition finie de $\mathscr{P}$ de $\mathbb{R}_+$ en intervalles, possédant la propriété suivante : pour tout $I \in \mathscr{P}$ et tout couple $(\varepsilon, \varepsilon')$ d'éléments de I tel que $\varepsilon \leqslant \varepsilon'$, l'inclusion $V_{\varepsilon'} \subset V_\varepsilon$ est une équivalence homotopique.

Commentaires. En ce qui concerne A), soulignons que même dans le cas où X est projective et lisse et où $V = X^{\mathrm{an}}$, cette assertion n'était jusqu'alors connue que lorsque X admet un modèle polystable, cf. les résultats globaux mentionnés en 2).

En ce qui concerne B), notons que V possède une base de voisinages qui sont des parties semi-algébriques de X^{an} ; cela permet de déduire B) de A) et de la locale contractibilité des complexes simpliciaux finis.

Par ailleurs, tout domaine analytique de X^{an} possède une base d'ouverts qui sont des parties semi-algébriques de X^{an}. Il s'ensuit que tout espace analytique localement isomorphe à un domaine analytique (de l'analytifié) d'une variété algébrique est localement contractile. Comme un espace analytique lisse est localement isomorphe à un ouvert d'une variété algébrique lisse, on retrouve comme cas particulier les résultats locaux mentionnés plus haut en 2), de surcroît un peu étendus : il n'y a plus besoin de supposer que la valeur absolue de k est non triviale, ni que les domaines en jeu sont *strictement* analytiques.

Les méthodes de Hrushovski et Loeser. L'intérêt de leur travail réside non seulement dans les résultats que nous venons d'évoquer, mais aussi dans les méthodes totalement