

CORPS D'OKOUNKOV
[d'après Okounkov, Lazarsfeld-Mustață et Kaveh-Khovanskii]

par Sébastien BOUCKSOM

INTRODUCTION

La théorie des corps d'Okounkov, développée indépendamment par Lazarsfeld et Mustață [LM09] et par Kaveh et Khovanskii [KK09], systématise une construction due à Okounkov [Ok96, Ok00] ; elle généralise le lien entre variétés toriques et polyèdres rationnels, en associant un corps convexe à tout fibré en droites sur une variété algébrique projective, *via* l'introduction d'une valuation adéquate sur le corps de fonctions de cette variété.

Afin d'énoncer dans un langage élémentaire une des conséquences principales de la théorie des corps d'Okounkov, donnons-nous un corps algébriquement clos k de caractéristique arbitraire, et considérons une k -algèbre graduée $A = \bigoplus_{m \in \mathbb{N}} A_m$ (à laquelle on impose toujours qu'elle soit commutative, et que $k = A_0 \subsetneq A$). La *fonction de Hilbert* de A est définie par $H_A(m) := \dim_k A_m$. On suppose de plus que A est intègre, ce qui assure que $\mathbb{N}(A) := \{m \in \mathbb{N} \mid H_A(m) \neq 0\}$ est un semigroupe de \mathbb{N} , non réduit à 0 (donc infini) par hypothèse.

Si A est de type fini, sa fonction de Hilbert H_A est à valeurs finies, et le classique théorème de Hilbert-Serre permet alors de montrer l'existence de $e \in \mathbb{Q}_+^*$ (la *multiplicité* de A) telle que

$$H_A(m) = e \frac{m^\kappa}{\kappa!} + o(m^\kappa)$$

lorsque $m \in \mathbb{N}(A)$ tend vers l'infini, avec $\kappa := \text{tr. deg}(A/k) - 1$, $\text{tr. deg}(A/k)$ désignant le degré de transcendance sur k du corps des fractions de A .

Ce résultat admet la généralisation importante suivante, démontrée dans [KK09].

THÉORÈME 0.1. — *Soit $A \neq k$ une k -algèbre graduée, et supposons que A se plonge dans une k -algèbre graduée intègre et de type fini. Si on pose $\kappa := \text{tr. deg}(A/k) - 1$,*

alors il existe $e \in \mathbb{R}_+^*$ tel que

$$H_A(m) = e \frac{m^\kappa}{\kappa!} + o(m^\kappa)$$

lorsque $m \in \mathbb{N}(A)$ tend vers l'infini.

D'un point de vue géométrique, l'hypothèse sur A signifie qu'elle peut se réaliser comme sous-algèbre de l'anneau des coordonnées homogènes d'une variété projective X , pour un plongement adéquat dans un espace projectif.

Ceci s'applique en particulier à l'algèbre des sections $R(X, L) := \bigoplus_{m \in \mathbb{N}} H^0(X, mL)$ d'un fibré en droites arbitraire L sur X . L'étude asymptotique de la fonction de Hilbert $m \mapsto h^0(mL) := \dim_k H^0(X, mL)$, classiquement appelée *problème de Riemann-Roch*, est une question centrale de la géométrie algébrique, très subtile dès la dimension 2 du fait que $R(X, L)$ n'est alors plus de type fini en général. Dans son article fondateur [Zar62], Zariski étudie ce problème sur les surfaces, et montre qu'il existe un polynôme P de degré au plus 2 tel que $h^0(mL) - P(m)$ est bornée pour $m \in \mathbb{N}(X, L) := \mathbb{N}(R(X, L))$; en caractéristique nulle, Cutkosky et Srinivas ont montré bien plus tard que $h^0(mL) - P(m)$ est même périodique pour $m \gg 1$ [CS93].

En dimension $n = \dim X$ quelconque et caractéristique nulle, Iitaka montre dans [Iit71] l'existence d'une estimée

$$C^{-1}m^\kappa \leq h^0(mL) \leq Cm^\kappa$$

pour $m \in \mathbb{N}(X, L)$ grand, avec $\kappa = \text{tr. deg}(R(X, L)/k) - 1 \in \{0, 1, \dots, n\}$ (ou $\kappa = -\infty$ si $R(X, L) = k$), connu sous le nom de *dimension d'Iitaka* de L . Si L est *gros*, i.e. si $\kappa = n$, un théorème de Fujita permet de montrer que le *volume*

$$\text{vol}(L) := \lim_{m \rightarrow \infty} \frac{h^0(mL)}{m^n/n!}$$

existe dans $]0, +\infty[$; celui-ci a fait l'objet de nombreux travaux (cf. [Laz04]), basés pour la plupart sur le théorème d'annulation de Kawamata-Viehweg, donc valables uniquement en caractéristique nulle.

La théorie des corps d'Okounkov permet non seulement d'obtenir simplement l'existence du volume et ses principales propriétés en caractéristique arbitraire [LM09], mais permet de plus d'étudier le cas de fibrés non gros avec une précision jusque-là inaccessible, comme l'illustre le théorème 0.1.

On va maintenant décrire dans ses grandes lignes la démonstration du théorème 0.1, et son lien avec la théorie des corps convexes. On suppose A plongée dans l'anneau des coordonnées homogènes R d'une variété algébrique projective $X \subset \mathbb{P}_k^N$, dont on note $n = \dim X$ la dimension. La construction qui suit repose sur le choix d'une valuation $v : K^* \rightarrow \mathbb{Z}^n$ sur le corps de fonctions K de X , i.e. un homomorphisme de groupes tel que $v(f + g) \geq \min\{v(f), v(g)\}$ pour $f, g \in K^*$, relativement à un ordre total sur le groupe \mathbb{Z}^n ; on demande de plus que le groupe des valeurs $v(K^*)$ de v soit égal

à \mathbb{Z}^n . La théorie élémentaire des valuations montre d'une part que de telles valuations abondent, et d'autre part qu'elles satisfont la propriété cruciale

$$(1) \quad \dim_k E = \text{card } v(E \setminus \{0\})$$

pour tout k -espace vectoriel de dimension finie $E \subset K$. Pour chaque $m \in \mathbb{N}$, la valuation v induit de façon naturelle une fonction $v : R_m \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{Z}^n$, et $S_m := v(A_m \setminus \{0\})$ est ainsi un sous-ensemble fini de \mathbb{Z}^n pour chaque $m \in \mathbb{N}$, de cardinal $H_A(m) = \dim_k A_m$. On a de plus $S_m + S_l \subset S_{m+l}$ pour $m, l \in \mathbb{N}$, puisque $A_m \cdot A_l \subset A_{m+l}$. Le point clé est alors le théorème d'équirépartition suivant :

THÉORÈME 0.2. — *Soit $S = (S_m)_{m \in \mathbb{N}}$ une suite de sous-ensembles de \mathbb{Z}^n telle que $S_m + S_l \subset S_{m+l}$ pour $m, l \in \mathbb{N}$, et posons $\mathbb{N}(S) := \{m \in \mathbb{N} \mid S_m \neq \emptyset\}$. Alors $\Delta := \overline{\bigcup_{m \in \mathbb{N}} \frac{1}{m} S_m}$ est un convexe fermé de \mathbb{R}^n , et la suite $\frac{1}{m} S_m \subset \mathbb{R}^n$ s'équirépartit dans Δ , au sens où*

$$\lim_{n \in \mathbb{N}(S), m \rightarrow +\infty} \frac{1}{m^{\dim \Delta}} \sum_{x \in \frac{1}{m} S_m} f(x) = \int_{\Delta} f d\mu,$$

pour toute fonction $f \in C_c^0(\mathbb{R}^n)$, avec μ la mesure de Lebesgue sur l'enveloppe affine de Δ , correctement normalisée.

En outre, Δ est compact ssi $\text{card } S_m = O(m^{\dim \Delta})$, et on a dans ce cas

$$\lim_{m \in \mathbb{N}(S), m \rightarrow \infty} \frac{\text{card } S_m}{m^{\dim \Delta}} = \mu(\Delta) \in]0, +\infty[.$$

On montre ensuite que le convexe fermé Δ' associé à la suite $S'_m := v(R_m \setminus \{0\})$ est de dimension maximale n , et donc compact selon le théorème 0.2, puisque $\text{card } S'_m = \dim_k R_m = O(m^n)$ par le théorème de Hilbert-Serre. Le convexe Δ associé à $S_m = v(A_m \setminus \{0\})$, étant contenu dans un translaté de Δ' , est donc lui aussi compact, et on obtient le théorème 0.1. On appelle $\Delta = \Delta_v(A)$ le *corps d'Okounkov de A* (relatif à v).

À la suite des articles fondateurs [Ok96, Ok00, LM09, KK09], la théorie des corps d'Okounkov s'est développée dans différentes directions : étude de la géométrie des corps d'Okounkov [KLM12, AKL12, Sep12] ; cas des variétés avec une action de groupe réductif [KK12], qui étoffe les résultats originaux de [Ok96, Ok00] ; analogues arithmétiques en géométrie d'Arakelov [Yua09, BC11] ; liens avec la théorie du pluripotential et le diamètre transfini [WN09] ; comportement asymptotique de certaines dégénérescences équivariantes (« test configurations ») [WN10, Sze11] ; construction de dégénérescences vers des variétés toriques [And11], dans la lignée de [Tei03] ; utilisation de ces dégénérescences pour construire des systèmes intégrables [HK12].

Plutôt que de survoler ces différents développements, le présent texte prend le parti de présenter en détail les aspects fondamentaux de la théorie. Le lecteur trouvera dans

l'excellent article [LM09] ainsi que dans [KK09, dBP12, CS12a, CS12b] une foule d'informations complémentaires.

Le texte est organisé comme suit. La première partie étudie les semigroupes de \mathbb{Z}^n , selon un point de vue adapté aux corps d'Okounkov. On y montre en particulier le théorème d'équirépartition énoncé ci-dessus.

La seconde partie présente quelques résultats appartenant à la théorie élémentaire des valuations, le but étant de montrer que les valuations de rang rationnel maximal sont exactement celles qui sont adaptées à la construction d'Okounkov.

La troisième partie décrit le cœur de la construction des corps d'Okounkov, et démontre en particulier le théorème 0.1 ci-dessus.

Enfin, la quatrième et dernière partie porte un regard plus géométrique sur les corps d'Okounkov. On montre sur des exemples que la géométrie du corps d'Okounkov d'un fibré en droites dépend de manière essentielle du choix de la valuation, et on détaille également la construction des corps d'Okounkov numériques, en suivant [LM09], avec en sus quelques faits nouveaux concernant la dimension numérique.

Remerciements. — Je tiens à exprimer ma reconnaissance à Charles Favre, Mattias Jonsson et Victor Lozovanu pour leurs suggestions et leur relecture attentive de ce texte. Je remercie également chaleureusement David Witt-Nyström et Huayi Chen, au contact desquels j'ai pu affiner ma compréhension des corps d'Okounkov.

1. SEMIGROUPES DISCRETS

Dans cette partie, V désigne un \mathbb{R} -espace vectoriel de dimension finie $n \in \mathbb{N}$. On étudie la structure des semigroupes de V engendrant un groupe discret ; on en déduit un résultat d'équirépartition pour les semigroupes gradués, qui est le point central de la théorie des corps d'Okounkov.

Les résultats de cette partie sont pour l'essentiel issus de [KK09, §1], qui est une systématisation de [Ok96, §2.5].

1.1. Semigroupes discrets d'un espace vectoriel

Un *semigroupe* $S \subset V$ est un sous-ensemble non vide de V stable par addition. On note

- $\mathbb{Z}S$ le sous-groupe de V engendré par S ;
- $\mathbb{R}S$ le \mathbb{R} -espace vectoriel engendré par S ;
- $C(S)$ le cône convexe engendré par S ;
- $\overline{C(S)}$ son adhérence, et $\overset{\circ}{C}(S)$ son intérieur relatif, *i.e.* son intérieur dans $\mathbb{R}S$.

La propriété de semigroupe donne immédiatement que

$$(2) \quad \mathbb{Z}S = \{x - y \mid x, y \in S\}$$

et

$$(3) \quad \overline{C}(S) = \overline{\left\{ \frac{s}{m} \mid s \in S, m \in \mathbb{N}^* \right\}}.$$

On définit la *dimension réelle* $\dim_{\mathbb{R}}(S)$ de S comme étant celle de $\mathbb{R}S$ (qui peut être strictement plus petite que $\dim_{\mathbb{Q}}(\mathbb{Q}S)$ dans cette généralité).

DÉFINITION 1.1. — La régularisation d'un semigroupe $S \subset V$ est le semigroupe $S^{\text{reg}} := \overline{C}(S) \cap \mathbb{Z}S$.

Notons que $\overline{C}(S^{\text{reg}}) = \overline{C}(S)$ et $\mathbb{Z}S^{\text{reg}} = \mathbb{Z}S$.

On dira que S est un *semigroupe discret* si $\mathbb{Z}S$ est discret, donc un réseau de $\mathbb{R}S$. À isomorphisme près, les semigroupes discrets d'un espace vectoriel sont exactement les sous-semigroupes de \mathbb{Z}^d pour un certain d .

On prendra garde au fait que la terminologie choisie est un peu abusive, puisqu'il se peut que S forme un sous-ensemble discret de V sans que $\mathbb{Z}S$ soit discret. C'est par exemple le cas de $S = \mathbb{N} + \mathbb{N}\sqrt{2} \subset \mathbb{R}$, qui n'est donc pas un semigroupe discret en notre sens.

Exemple 1.2. — Puisque tout sous-groupe discret de \mathbb{R} est monogène, il existe pour tout semigroupe discret $S \subset \mathbb{R}$ un réel $e \in \mathbb{R}$ tel que $S^{\text{reg}} = \mathbb{Z}e$ ou $S^{\text{reg}} = \mathbb{N}e$; il est également bien connu que $S^{\text{reg}} \setminus S$ est fini (un cas particulier du théorème 1.3 ci-dessous).

Le but de ce qui suit est de montrer que tout semigroupe discret S de V coïncide asymptotiquement avec S^{reg} dans $\overset{\circ}{C}(S)$.

THÉORÈME 1.3. — Soit $S \subset V$ un semigroupe discret. Pour tout cône convexe σ à base compacte contenue dans $\overset{\circ}{C}(S)$, l'ensemble $(S^{\text{reg}} \setminus S) \cap \sigma$ est fini.

LEMME 1.4. — Soit $S \subset V$ un semigroupe discret. Si S est de type fini, alors il existe un ensemble fini $F \subset S^{\text{reg}}$ tel que $S^{\text{reg}} = F + S$.

Remarque 1.5. — D'après [BG09, Proposition 2.7], la conclusion signifie précisément que $k[S^{\text{reg}}]$ est un $k[S]$ -module de type fini, pour n'importe quel corps k donné. Le lemme 1.4 implique en particulier que

$$S \text{ de type fini} \implies S^{\text{reg}} \text{ de type fini},$$

qui est le contenu du classique *lemme de Gordan* (voir par exemple [Oda88, Proposition 1.1]). L'exemple de $S := \{(x, y) \in \mathbb{N}^2 \mid y \geq x + 1\}$ montre que S^{reg} peut être de type fini sans que S le soit.