

GROUPES PLEINS-TOPOLOGIQUES [d'après Matui, Juschenko, Monod, ...]

par Yves de CORNULIER

1. INTRODUCTION

Le but de cet exposé est de décrire la construction récente et élégante de groupes infinis de type fini, simples et moyennables. Elle découle du théorème ci-dessous. On appelle *espace de Cantor* un espace homéomorphe à l'ensemble triadique de Cantor. Soit φ un autohoméomorphisme d'un espace de Cantor X , c'est-à-dire un homéomorphisme de X sur lui-même. On suppose φ minimal, au sens où toutes ses orbites sont denses. Par définition, son groupe *plein-topologique* $[[\varphi]]$, est le groupe (discret !) des autohoméomorphismes de X qui coïncident localement avec une puissance de φ (voir au §2.2 une définition plus générale et plus détaillée).

THÉORÈME. — *Le groupe plein-topologique $[[\varphi]]$ est infini, ainsi que son sous-groupe dérivé $[[\varphi]]'$; de plus*

- (Matui, 2006) *le groupe dérivé $[[\varphi]]'$ est un groupe simple ;*
- (Matui, 2006) *si φ est un sous-décalage topologique (voir §2.1), alors le groupe dérivé $[[\varphi]]'$ est un groupe de type fini ;*
- (Juschenko–Monod, 2012 ; conjecturé par Grigorchuk–Medynets [GrMe12]) *le groupe $[[\varphi]]$ est moyennable (et donc $[[\varphi]]'$ aussi).*

Le groupe plein-topologique $[[\varphi]]$ est un cas particulier d'une construction de W. Krieger (1980) [Kri80, p. 88] mais n'y est pas étudié dans le cas d'une action d'un autohoméomorphisme minimal. Il est ensuite implicitement introduit, dissimulé sous le nom « Γ », en termes de C^* -algèbres par Putnam (1989) [Pu89, Sec. 5], en étudiant dans un cadre topologique des objets introduits par Vershik [Ve81, Ve82] dans un contexte mesurable. Le groupe plein-topologique d'un autohoméomorphisme minimal est ensuite étudié de manière systématique par E. Glasner et B. Weiss [GIW95] (sous le nom « groupe plein-fini »), Skau [Sk97] et surtout Giordano, Putnam et Skau (1999) dans [GPS99] (et déjà, de manière implicite mais profonde, dans l'article

important [GPS95]). Ces derniers montrent notamment, en utilisant un résultat de Boyle [Bo83], que la classe d'isomorphie du groupe $[[\varphi]]$ caractérise la paire $\{\varphi, \varphi^{-1}\}$ à conjugaison près dans le groupe des autohoméomorphismes de l'espace de Cantor. Ceci a été étendu à $[[\varphi]]'$ par Bezuglyi et Medynets [BeM08], avec une méthode plus directe. De l'existence d'un continuum d'autohoméomorphismes minimaux de l'espace de Cantor deux à deux non conjugués et qui sont des sous-décalages (par exemple, associés aux rotations irrationnelles, voir l'exemple plus bas), il découle que les groupes simples de type fini obtenus $[[\varphi]]'$ forment également un continuum de classes d'isomorphie.

Moyennabilité

Un groupe Γ est *moyennable* s'il possède une moyenne (c'est-à-dire une probabilité finiment additive définie sur toutes les parties) invariante par translations à gauche. Un des intérêts de la moyennabilité est qu'elle peut aussi bien être caractérisée de manière analytique, probabiliste, dynamique et géométrique. À titre d'illustration, en voici diverses caractérisations équivalentes (qu'il n'est pas nécessaire de déchiffrer pour comprendre la suite ; voir notamment [Gre, Eym, Pat]).

- Γ admet des parties presque invariantes : pour toute partie finie $S \subset \Gamma$ et $\varepsilon > 0$, il existe une partie finie non vide F de Γ telle que $\#(SF \setminus F)/\#F \leq \varepsilon$.
- Toute action de Γ par autohoméomorphismes sur un espace compact non vide préserve une mesure de probabilité invariante sur les boréliens.
- Toute action affine continue de Γ sur un convexe compact non vide d'un espace localement convexe admet un point fixe.
- Γ n'admet pas de décomposition paradoxale (voir remarque 2.2).
- La représentation régulière de Γ sur $\ell^2(\Gamma)$ admet des vecteurs unitaires presque invariants.
- L'algèbre de Banach $\ell^1(\Gamma)$ est nucléaire.
- L'algèbre de von Neumann de Γ est hyperfinie.
- Le morphisme canonique de la C^* -algèbre maximale de Γ vers sa C^* -algèbre réduite est un isomorphisme.
- Pour toute mesure de probabilité symétrique à support fini $S \subset \Gamma$ contenant 1, la marche aléatoire donnée au temps n par multiplication à droite par un élément choisi au hasard dans S , a une probabilité de retour en 1 décroissant sous-exponentiellement vers 0.

Les groupes moyennables constituent une classe stable par passage aux sous-groupes, quotients, extensions et limites directes. La plus petite classe de groupe stable par ces opérations contenant les groupes finis et abéliens est appelée classe des groupes *élémentairement moyennables*. De fait, ce sont les exemples « immédiats » de groupes moyennables, comprenant notamment les groupes virtuellement résolubles (c'est-à-dire, ayant un sous-groupe d'indice fini résoluble). Cependant, il est facile de vérifier que tout groupe de type fini élémentairement moyennable et non trivial admet

un quotient fini non trivial (et, s'il est infini, admet un quotient infini virtuellement abélien non trivial), si bien que ces groupes sont très loin d'être simples. S'il est connu depuis le début de l'étude de la croissance des groupes que tout groupe de croissance sous-exponentielle est moyennable, les premiers exemples non triviaux (à croissance dite intermédiaire) ont été obtenus par Grigorchuk en 1984 [Gri84]. Ce sont les premiers exemples connus de groupes moyennables et non élémentairement moyennables. Ce sont des groupes d'automorphismes d'arbres enracinés de degré fini et à ce titre ils sont résiduellement finis (et donc loin d'être simples). La plus petite classe de groupes stable par les opérations décrites précédemment contenant les groupes à croissance sous-exponentielle est appelée classe des groupes *sous-exponentiellement moyennables*; elle contient les groupes élémentairement moyennables mais est strictement plus grosse puisqu'elle contient également les groupes à croissance intermédiaire. Les premiers exemples de groupes moyennables mais pas sous-exponentiellement moyennables, comprenant le « groupe de la basilique », ont été introduits par Grigorchuk et Zuk [GrZu02]; leur moyennabilité a été démontrée par Bartholdi et Virag [BV05], en utilisant les marches aléatoires; ils sont également résiduellement finis. Leur méthode a été largement généralisée et étendue [Kai05, Ers06, Bri09, BKN10] par des méthodes également basées sur les marches aléatoires et s'appliquant à des groupes agissant naturellement sur des arbres enracinés de valence finie.

On ne connaissait pas, précédemment, de groupe de type fini moyennable non trivial sans quotient fini non trivial, et donc, *a fortiori*, aucun qui soit infini et simple. Les exemples $[[\varphi]]'$ sont à croissance exponentielle, par un résultat de Matui [Ma12], et il en découle immédiatement qu'ils ne sont pas sous-exponentiellement moyennables (voir le fait A.2).

Le critère de moyennabilité utilisé par Juschenko et Monod [JM12] est le suivant. Rappelons qu'une permutation σ de \mathbf{Z} est à *déplacement borné* si $|\sigma(n) - n|$ est borné indépendamment de $n \in \mathbf{Z}$, et que deux parties $A, B \subset \mathbf{Z}$ sont *commensurables* si la différence symétrique $A \Delta B$ est finie.

THÉORÈME (Critère de Juschenko-Monod). — *Soit Γ un groupe agissant sur \mathbf{Z} par permutations à déplacement borné. On suppose que le stabilisateur de \mathbf{N} est moyennable. Alors Γ est moyennable.*

Dans le cas d'un autohoméomorphisme minimal d'un espace de Cantor, le théorème précédent s'applique à $[[\varphi]]$, qui agit sur \mathbf{Z} via l'identification de \mathbf{Z} à une orbite d'un élément quelconque x_0 dans l'espace de Cantor : $\psi \cdot n$, pour $\psi \in [[\varphi]]$ et $n \in \mathbf{Z}$, est l'unique entier m tel que $\psi(\varphi^n(x_0)) = \varphi^m(x_0)$. Putnam ayant montré [Pu89] que le stabilisateur dans $[[\varphi]]$ de toute orbite positive $\{\varphi^n(x) : n \in \mathbf{N}\}$ est localement fini (au sens où toute partie finie engendre un sous-groupe fini), le théorème implique que $[[\varphi]]$ est moyennable.

Exemples

Un exemple explicite de sous-décalage minimal φ s'obtient comme ceci : on considère un irrationnel α et on considère, sur le cercle \mathbf{R}/\mathbf{Z} , la rotation $r_\alpha : z \mapsto z + \alpha$. On peut définir un espace $[\mathbf{R}/\mathbf{Z}]_{\mathbf{Z}\alpha}$, homéomorphe à l'espace de Cantor, muni d'une projection sur le cercle par laquelle la rotation r_α se relève canoniquement en un autohoméomorphisme minimal $\varphi = \tilde{r}_\alpha(x)$. Une manière de l'obtenir est de remplacer chaque point x de l'orbite $\mathbf{Z}\alpha \subset \mathbf{R}/\mathbf{Z}$ par une paire $\{x^-, x^+\}$, et de munir l'espace ainsi obtenu de l'ordre cyclique évident et de la topologie associée. Ainsi si $x \notin \mathbf{Z}\alpha$, on définit $\tilde{r}_\alpha(x) = x + \alpha$ et si $x \in \mathbf{Z}\alpha$ on définit $\tilde{r}_\alpha(x^\pm) = (x + \alpha)^\pm$; l'espace $[\mathbf{R}/\mathbf{Z}]_{\mathbf{Z}\alpha}$ est métrisable, compact, non vide, totalement discontinu et sans point isolé et donc est homéomorphe à l'espace de Cantor ; l'autohoméomorphisme \tilde{r}_α est minimal. On vérifie alors que, pour tout $\varepsilon \in \mathbf{Z}\alpha \cap]0, 1/2[\subset \mathbf{R}/\mathbf{Z}$, les translatés de l'ouvert fermé $[0^+, \varepsilon^-]$ séparent les points de $[\mathbf{R}/\mathbf{Z}]_{\mathbf{Z}\alpha}$, si bien que $([\mathbf{R}/\mathbf{Z}]_{\mathbf{Z}\alpha}, \varphi_\alpha)$ est un sous-décalage (voir le fait 2.1.2). Cette construction est due à Keane [Kea75, §5] et le groupe plein-topologique associé est considéré spécifiquement par Matui dans [Ma06, Example 6.2]. Notons que r_α est uniquement ergodique (théorème d'équidistribution de Kronecker-Weyl, voir [KH, Proposition 4.2.1]) et les valeurs propres de l'opérateur unitaire associé sur $L^2([\mathbf{R}/\mathbf{Z}]_{\mathbf{Z}\alpha}) = L^2(\mathbf{R}/\mathbf{Z})$ sont les $e^{2i\pi n\alpha}$ pour $n \in \mathbf{Z}$; en particulier les groupes cycliques $\langle r_\alpha \rangle \subset \text{Homeo}([\mathbf{R}/\mathbf{Z}]_{\mathbf{Z}\alpha})$ pour α irrationnel dans $[0, 1/2]$ sont deux à deux non conjugués et donnent donc, par le résultat de Boyle et Giordano-Putnam-Skau, des groupes pleins-topologiques deux à deux non isomorphes.

L'exemple précédent est sous-groupe du groupe IET des échanges d'intervalles, introduit par Keane [Kea75], habituellement défini comme l'ensemble des translations par morceaux continues à droite de \mathbf{R}/\mathbf{Z} mais qui, comme Keane l'a observé [Kea75, §5], peut s'interpréter comme groupe d'autohoméomorphismes d'un compact totalement discontinu. La question de la moyennabilité du groupe entier IET est ouverte. La résoudre consisterait à démontrer un résultat de moyennabilité pour des groupes pleins-topologiques associés à certaines actions de groupes abéliens de type fini. Cependant, le théorème de Juschenko-Monod ne se généralise pas sans hypothèse supplémentaire : une construction élémentaire dans [EM12] montre que le groupe plein-topologique associé à une action libre et minimale de \mathbf{Z}^2 sur un espace de Cantor peut contenir un groupe libre non abélien.

Plan

(Ci-dessous, φ est un autohoméomorphisme minimal de l'espace de Cantor.)

On va commencer par introduire les notions générales en détail, dans la partie 2 ; et énoncer quelques faits généraux (non spécifiques aux actions de \mathbf{Z}), notamment le fait 2.2.4 qui montre que les groupes pleins-topologiques contiennent « beaucoup » d'éléments de torsion et, en particulier, que $[\varphi]'$ est un groupe infini.

La partie 3 contient les principaux résultats algébriques connus sur le groupe $[[\varphi]]'$. En particulier, les résultats de Matui mentionnés plus haut sont établis au §3.1 pour la simplicité et au §3.2 pour la type-finitude dans le cas d'un sous-décalage minimal.

D'autres résultats sont prouvés au §3.4, notamment le résultat, également dû à Matui, que $[[\varphi]]'$ n'est jamais de présentation finie, ainsi que le fait, dû à Grigorchuk et Medynets, qu'il n'est pas finiment approximable (définition 3.4.1). Au §3.5, on prouve le résultat, aussi dû à Matui, que pour un sous-décalage minimal infini, $[[\varphi]]'$ contient un semi-groupe libre à 2 générateurs et est donc à croissance exponentielle.

La partie 4 contient le résultat de moyennabilité de Juschenko-Monod. Elle est indépendante de la précédente en ce qui concerne la preuve du critère. Le fait d'appliquer le critère est lui basé sur le lemme de Putnam, qui se trouve au §3.3.

À titre d'illustration de l'importance de l'hypothèse de minimalité dans certains des résultats ci-dessus, quelques exemples de groupes pleins-topologiques $[[\varphi]]$ pour φ sous-décalage non minimal sont étudiés au §3.7.

Problèmes et questions ouvertes

On considère le groupe plein-topologique associé à un sous-décalage minimal infini sur \mathbf{Z} . Rappelons que son groupe dérivé $[[\varphi]]'$ est, par un résultat de Matui, un groupe simple de type fini.

- (1) Estimer la fonction de Følner de $[[\varphi]]'$, peut-être en discutant sur φ . Rappelons qu'après choix d'un système générateur fini S symétrique et contenant 1, elle associe à $n \geq 1$ le nombre

$$F\text{øl}(n) = \inf\{\#K \mid \#(SK \setminus K)/\#(K) \leq 1/n\},$$

K parcourant les parties finies non vides du groupe. De même, estimer la fonction de Følner dans les boules

$$BF\text{øl}(n) = \inf\{\text{diam}(K) \mid \#(SK \setminus K)/\#(K) \leq 1/n\}$$

et la probabilité de retour des marches aléatoires sur le graphe de Cayley de $[[\varphi]]'$.

- (2) Donner des résultats généraux sur la structure des sous-groupes de $[[\varphi]]'$. Par exemple :

- (2a) étant moyennable, $[[\varphi]]$ ne contient pas de sous-groupe libre non abélien. Donner une preuve directe de ce fait.
- (2b) Est-ce que tous les sous-groupes de présentation finie (resp. résiduellement finis, resp. sans torsion) de $[[\varphi]]'$ sont élémentairement moyennables?
- (2c) Est-il vrai que tout sous-groupe de type fini de $[[\varphi]]$ est à croissance exponentielle ou polynomiale? que tout sous-groupe infini de type fini possède un élément d'ordre infini?