Séminaire BOURBAKI Janvier 2013
65[e] année, 2012-2013, n[o] 1066, p. 245 à 263

L'ÉQUATION DE KARDAR-PARISI-ZHANG [d'après Martin Hairer]

par **Lorenzo ZAMBOTTI**

1. INTRODUCTION

Dans cet exposé, nous présentons les résultats de Martin Hairer [6] sur l'équation de KPZ (Kardar-Parisi-Zhang, à ne pas confondre avec la formule de Knizhnik-Polyakov-Zamolodchikov en gravité quantique, qui a été l'objet d'un Séminaire Bourbaki en mars 2012). Cette équation a été introduite en 1986 dans [8] pour décrire les fluctuations d'une interface dans un modèle de croissance aléatoire et a été ensuite reconnue comme un objet universel, censé être la limite d'échelle de nombreux modèles en mécanique statistique, comme les fluctuations du WASEP (weakly asymmetric simple exclusion process) [2], ou la fonction de partition de polymères dirigés en milieu aléatoire [7, 1] : voir [3] pour plus de résultats et détails dans ce contexte.

Formellement, l'équation de KPZ s'écrit

$$\partial_t h = \partial_x^2 h + (\partial_x h)^2 - \infty + \xi, \qquad t \geqslant 0,\ x \in \mathbb{S}^1 \stackrel{\text{def}}{=} \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}, \tag{1}$$

où $h = h(t,x)$ est une fonction continue aléatoire sur $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{S}^1$ et $\xi = \xi(t,x)$ est une distribution aléatoire sur $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{S}^1$ avec loi gaussienne (qui sera précisée ci-dessous). Il s'agit d'une équation parabolique non-linéaire avec un terme aléatoire, en d'autres termes d'une *équation aux dérivées partielles stochastique* (EDPS).

Dans le membre de droite de (1) on voit une constante infinie, dont le rôle est de renormaliser la non-linéarité quadratique, censée diverger car la solution h ne peut pas être différentiable en espace. L'équation de KPZ n'est en effet pas une EDPS standard ; paradoxalement, depuis une vingtaine d'années, on connaît un candidat explicite pour h, la solution de Cole-Hopf décrite ci-dessous, mais on ne sait pas prouver rigoureusement qu'il satisfait (1) ! Tous les résultats récents où intervient l'équation de KPZ sont en effet fondés sur la connaissance de cette solution explicite, pas sur la forme de l'équation qu'elle est censée résoudre.

Malheureusement cette approche a plusieurs défauts, notamment l'impossibilité de développer des méthodes robustes d'approximation de (1) et de montrer que des limites d'échelle d'objets discrets sont solutions de cette équation : cela a été accompli par exemple pour le WASEP car il est l'un des rares processus discrets à posséder une version discrète de la transformation de Cole-Hopf ; dès que ce miracle ne se produit pas, on est dans l'impasse.

Toutes les tentatives de donner une théorie d'existence et d'unicité pour les solutions de (1) sans passer par la transformation de Cole-Hopf ont jusque-là échoué. Le travail récent [6] résout ce problème et ouvre des perspectives passionnantes ; les deux problématiques principales, *a priori* non directement reliées à l'équation (1), sont les suivantes : 1) comment définir le produit d'une distribution (au sens de Schwartz) et d'une fonction de régularité très faible, et résoudre des EDP ou EDPS contenant de tels produits ; 2) comment prouver l'existence d'une classe, indexée par des arbres binaires, de fonctions polynomiales d'un champ aléatoire gaussien. Le premier problème est de nature analytique, et il est résolu avec la théorie des *chemins rugueux* ; le second est de nature probabiliste mais il requiert une étude combinatoire d'une classe de graphes associés, inspirés des *diagrammes de Feynman*.

Un aspect intrigant est que les résultats « à la Cole-Hopf » et ceux de Hairer restent à peu près orthogonaux, car il semble aujourd'hui impossible de prouver les uns dans le contexte des autres. Cependant les deux théories se développent actuellement très rapidement et on ne peut qu'attendre avec impatience les nouvelles avancées qui se préparent déjà.

2. PREMIERS PAS VERS KPZ

Le prototype d'EDPS est l'équation de la chaleur stochastique avec bruit additif :

$$\partial_t Y = \partial_x^2 Y + \xi, \qquad t \geqslant 0,\ x \in \mathbb{S}^1, \tag{2}$$

où $Y = Y_t(x)$ est une fonction continue aléatoire sur $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{S}^1$ et $\xi = \xi(t,x)$ est un bruit blanc en espace-temps, c'est-à-dire un champ aléatoire à valeurs dans les distributions sur $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{S}^1$ avec loi gaussienne centrée et fonction de corrélation

$$\mathbb{E}(\xi(x,t)\xi(y,s)) = \delta(x-y)\,\delta(t-s), \qquad t,s \geqslant 0,\ x,y \in \mathbb{S}^1. \tag{3}$$

Par les propriétés des vecteurs gaussiens, $\xi(x,t)$ et $\xi(y,s)$ sont indépendants lorsque $(x,t) \neq (y,s)$. Une façon standard de construire un tel champ aléatoire consiste à considérer la base de Fourier $(e_k(\cdot))_{k\in\mathbb{Z}}$ de $L^2(\mathbb{S}^1)$ et une suite indépendante de mouvements browniens réels $(B_k)_{k\in\mathbb{Z}}$; on définit alors pour tous $t \geqslant 0$ et $\psi \in \mathcal{C}(\mathbb{S}^1)$

$$\int_{[0,t]\times\mathbb{S}^1} \psi(x)\,\xi(s,x)\,ds\,dx \stackrel{\text{def}}{=} \sum_k B_k(t)\,\langle e_k, \psi\rangle,$$

où nous notons $\langle\cdot,\cdot\rangle$ le produit scalaire canonique dans $L^2(\mathbb{S}^1)$. On voit facilement que la série dans le terme de droite converge p.s. et que la fonction de corrélation de ξ est donnée par (3). Pour toute condition initiale $Y_0 \in \mathcal{C}(\mathbb{S}^1)$, l'équation (2) a une unique solution explicite qui s'écrit par la méthode de variation des constantes

$$Y_t \stackrel{\text{def}}{=} P_t Y_0 + S_t, \qquad S_t \stackrel{\text{def}}{=} \sum_k \int_0^t e^{-k^2(t-s)}\, dB_k(s)\, e_k = \int_0^t P_{t-s}\xi(s,\cdot)\, ds,$$

où $(P_t)_{t\geqslant 0}$ est le semigroupe de la chaleur sur $\mathbb{S}^1$. La fonction $S = S_t(x)$ est appelée la *convolution stochastique* et il est bien connu [4] que presque sûrement elle admet une version dans $\mathcal{C}(\mathbb{R}_+;\mathcal{C}^{\frac{1}{2}-\varepsilon}(\mathbb{S}^1))$ pour tout $\varepsilon > 0$ mais pas mieux.

Quand $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ est une application lipschitzienne, on peut donner une théorie d'existence et unicité de solutions de l'EDPS non-linéaire

$$\partial_t X = \partial_x^2 X + f(X) + \xi, \qquad t \geqslant 0,\ x \in \mathbb{S}^1, \tag{4}$$

en s'appuyant sur la formulation *mild*

$$X_t = P_t X_0 + \int_0^t P_{t-s} f(X_s)\, ds + S_t \tag{5}$$

et sur une méthode de point fixe, voir par exemple [4]. La régularité de $X = X_t(x)$ est évidemment la même que celle de $S = S_t(x)$. On peut remarquer que tout l'aléa dans (5) est concentré dans S ; on peut donc considérer S comme une fonction continue générique, résoudre (5) pour tout $S \in \mathcal{C}(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{S}^1)$, montrer que l'application $S \mapsto X$ est mesurable et ensuite remplacer S par l'expression de la convolution stochastique donnée ci-dessus.

2.1. La solution à la Cole-Hopf

Comme nous l'avons vu pour (4), les solutions des EDPS avec bruit blanc en espace-temps ne sont pas plus que höldériennes en espace, donc le terme $(\partial_x h)^2$ dans (1) ne peut pas être défini de façon classique, et la constante infinie « ∞ » est censée renormaliser ce terme divergent. Une formulation *mild* comme (5) n'est pas possible pour KPZ.

Une autre justification de la nécessité d'une telle renormalisation du terme quadratique est donnée par la transformation de Cole-Hopf. Si l'on pose

$$\partial_t Z = \partial_x^2 Z + Z\xi, \qquad t \geqslant 0,\ x \in \mathbb{S}^1, \tag{6}$$

où $Z\xi$ est à interpréter comme une intégrale stochastique à la Ito donnée par

$$Z\xi \stackrel{\text{def}}{=} \sum_k \langle e_k, Z\rangle\, e_k\, dB_k,$$

alors un résultat dû à Mueller [10] montre que p.s. $Z(t,x) > 0$ pour tous $t > 0$, $x \in \mathbb{S}^1$ si $Z(0,\cdot) > 0$; une application formelle de la formule d'Ito montre alors que $h \stackrel{\text{def}}{=} \log Z$

est une solution de KPZ. Pour justifier ce calcul formel, nous pouvons considérer une régularisation en espace ξ_ε de ξ, définie pour tous $t \geqslant 0$ et $\psi \in \mathcal{C}(\mathbb{S}^1)$ par

$$\int_{[0,t]\times\mathbb{S}^1} \psi(x)\,\xi_\varepsilon(s,x)\,ds\,dx \overset{\text{def}}{=} \sum_k \varphi(\varepsilon k)\,B_k(t)\,\langle e_k,\psi\rangle, \tag{7}$$

où $\varphi : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}_+$ est une fonction paire, régulière, décroissante sur $\mathbb{R}_+$, avec support compact et telle que $\varphi(0) = 1$. Nous définissons alors Z_ε en remplaçant ξ par ξ_ε dans (6) et une application (cette fois-ci rigoureuse) de la formule d'Ito montre que $h_\varepsilon \overset{\text{def}}{=} \log Z_\varepsilon$ est solution classique de

$$\partial_t h_\varepsilon = \partial_x^2 h_\varepsilon + (\partial_x h_\varepsilon)^2 - C_\varepsilon + \xi_\varepsilon, \tag{8}$$

où $C_\varepsilon = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \varphi^2(k\varepsilon) \approx \frac{1}{\varepsilon}\int_{\mathbb{R}} \varphi^2(x)\,dx$. Puisque Z_ε converge vers Z et donc h_ε vers h, il est naturel de considérer $h = \log Z$ comme une solution de KPZ. Cependant le passage à la limite dans (8) reste impossible à cause du terme quadratique qui n'est pas bien défini à la limite et de la constante C_ε qui diverge lorsque $\varepsilon \downarrow 0$.

Pour les EDPS classiques comme (4), on se réduit à l'EDP (5) avec un terme aléatoire S et ensuite on applique une méthode « déterministe » de point fixe. Hairer a développé pour KPZ une version beaucoup plus sophistiquée de cette approche, en écrivant une équation différente mais équivalente à (8), où apparaît un nombre fini (cinq) de fonctions polynomiales du bruit sous-jacent ξ_ε et pour laquelle on peut écrire un problème de point fixe ; ensuite il montre que les (cinq) fonctions polynomiales convergent lorsque $\varepsilon \downarrow 0$ et que le problème de point fixe reste stable par ce passage à la limite. Plus précisément, il obtient

– un espace polonais $\mathcal{X}$,
– une application $h : \mathcal{X} \mapsto \mathcal{C}(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{S}^1)$ continue,
– des variables aléatoires $\Psi_\varepsilon, \Psi \in \mathcal{X}$,

tels que presque sûrement $h(\Psi_\varepsilon)$ est la solution de l'équation régularisée (8), $h(\Psi)$ est la solution à la Cole-Hopf et $\Psi_\varepsilon \to \Psi$ dans $\mathcal{X}$. Une solution de KPZ est donc construite pour une classe générale de bruits ξ avec des propriétés de continuité dans une topologie appropriée. Cela donne une résolution *trajectorielle* de KPZ.

2.2. Processus indexés par des arbres binaires

Commençons par une étude de l'équation (8). La structure quadratique de la non-linéarité suggère une écriture de la solution comme une série indexée par l'ensemble $\mathcal{T}$ des arbres binaires finis enracinés. Nous notons $\bullet \in \mathcal{T}$ l'arbre trivial contenant uniquement la racine ; si $\tau_1, \tau_2 \in \mathcal{T}$, alors $\tau = [\tau_1, \tau_2]$ est la concaténation de τ_1 et τ_2, c'est-à-dire que τ contient sa racine, à laquelle sont attachés τ_1 et τ_2 par les racines respectives. Nous définissons

$$\partial_t Y_\varepsilon^\bullet = \partial_x^2 Y_\varepsilon^\bullet + \xi_\varepsilon, \tag{9}$$

et pour tout $\tau = [\tau_1, \tau_2]$ avec $\tau_1, \tau_2 \in \mathcal{T}$,

$$\partial_t Y_\varepsilon^\tau = \partial_x^2 Y_\varepsilon^\tau + \partial_x Y_\varepsilon^{\tau_1}\, \partial_x Y_\varepsilon^{\tau_2} - C_\varepsilon^\tau, \qquad t \geqslant 0,\ x \in \mathbb{S}^1, \tag{10}$$

où C_ε^τ est une constante qui devra être choisie de façon appropriée. Les conditions initiales de (9) et (10) sont telles que les processus

$$(\langle Y_{\varepsilon,t}^\tau, e_k\rangle, k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\})_{t\geqslant 0}, \qquad \forall\, \tau \in \mathcal{T}, \tag{11}$$

soient stationnaires, et $\langle Y_{\varepsilon,0}^\tau, e_0\rangle = 0$ (ces choix ne sont pas les seuls possibles mais ils simplifient les calculs dans la preuve du théorème 2.1 ci-dessous). On voit alors facilement que la série formelle

$$h_\varepsilon \stackrel{\text{def}}{=} \sum_\tau Y_\varepsilon^\tau \tag{12}$$

résout (formellement aussi) l'équation

$$\partial_t h_\varepsilon = \partial_x^2 h_\varepsilon + (\partial_x h_\varepsilon)^2 - \sum_\tau C_\varepsilon^\tau + \xi_\varepsilon,$$

c'est-à-dire l'équation (8) si $C_\varepsilon = \sum_\tau C_\varepsilon^\tau$. Le problème avec cette approche est que, pour $\varepsilon > 0$, la convergence de la série dans (12) est loin d'être évidente ; ensuite, même après avoir surmonté ce problème, on ne saurait pas montrer que h_ε converge quand $\varepsilon \downarrow 0$.

La stratégie adoptée par Hairer est différente : il effectue une troncature de la série dans (12), en cherchant des solutions de (8) sous la forme

$$h_\varepsilon = \sum_{\tau \in \bar{\mathcal{T}}} Y_\varepsilon^\tau + u_\varepsilon \stackrel{\text{def}}{=} h_\varepsilon^\star + u_\varepsilon, \qquad \bar{\mathcal{T}} = \{\bullet, \vee, [\vee,\bullet], [\bullet,\vee], [\vee,\vee], [[\vee,\bullet],\bullet], [[\bullet,\vee],\bullet], [\bullet,[\vee,\bullet]], [\bullet,[\bullet,\vee]]\}, \tag{13}$$

et il prouve que

(1) pour $\tau \in \bar{\mathcal{T}}$ il existe une constante C_ε^τ telle que Y_ε^τ converge en probabilité dans un espace de fonctions höldériennes (de régularité dépendant de τ) vers un processus Y^τ quand $\varepsilon \downarrow 0$;

(2) le reste u_ε satisfait une équation pour laquelle il est possible de justifier un passage à la limite quand $\varepsilon \downarrow 0$ et on peut prouver que les limites possibles sont uniques et dépendent du bruit ξ de façon continue (dans une topologie appropriée).

2.3. Convergence de Y_ε^τ

Plus précisément, le point 1 est prouvé dans le

Théorème 2.1. — *On définit*

$$\alpha_\bullet = \frac{1}{2}\,, \qquad \alpha_\vee = 1, \qquad \alpha_{[\tau_1,\tau_2]} = (\alpha_{\tau_1} \wedge \alpha_{\tau_2}) + 1, \quad \tau_1, \tau_2 \in \mathcal{T}.$$