Séminaire BOURBAKI Mars 2013
65e année, 2012-2013, n° 1067, p. 265 à 292

LE MOUVEMENT BROWNIEN BRANCHANT VU DEPUIS SA PARTICULE LA PLUS À GAUCHE
[d'après Arguin-Bovier-Kistler and Aïdékon-Berestycki-Brunet-Shi]

par **Jean-Baptiste GOUÉRÉ**

1. INTRODUCTION

Une particule est placée en l'origine de la droite réelle à l'instant initial. Cette particule se déplace en suivant un mouvement brownien standard. Au bout d'un temps indépendant de loi exponentielle de moyenne 1, cette particule se divise alors en 2 particules. Les deux particules ainsi obtenues évoluent indépendamment et de la même manière que la première particule : déplacement brownien puis division.

Notons $N(t)$ le nombre de particules présentes à l'instant $t \geqslant 0$. Remarquons que $N(t)$ est une variable aléatoire d'espérance $\exp(t)$. Notons $X_1(t) \geqslant \cdots \geqslant X_{N(t)}(t)$ les positions de ces particules ordonnées par ordre décroissant. Le comportement asymptotique du maximum $X_1(t)$ du mouvement brownien branchant a été l'objet de nombreux travaux de natures probabilistes et analytiques. Cette popularité s'explique en partie par l'existence de liens très étroits entre ce modèle et la famille des équations aux dérivées partielles de Fisher ou Kolmogorov-Petrovsky-Piscounov (F-KPP). Ce lien a été mis en lumière par McKean [McK75]. Explicitons-le sur un exemple. Notons $v(t,\cdot)$ la fonction de répartition du maximum du nuage de particules à l'instant $t \geqslant 0$:

$$v(t,x) = P(X_1(t) \leqslant x). \tag{1}$$

On vérifie facilement que cette fonction est solution de l'équation F-KPP suivante :

$$\frac{\partial v}{\partial t} = \frac{1}{2}\frac{\partial^2 v}{\partial^2 x} + v^2 - v. \tag{2}$$

Plus récemment, des résultats sur le comportement asymptotique de l'ensemble du nuage de particules vu depuis son maximum ont été obtenus indépendamment par Arguin-Bovier-Kistler [ABK11a, ABK12c, ABK11b, ABK12b, ABK12a] et Aïdékon-Berestycki-Brunet-Shi [ABBS11]. Cet exposé est consacré à la présentation de ces résultats. Nous nous concentrerons essentiellement sur les articles [ABK11b] et [ABBS11] et, dans une moindre mesure, [ABK11a]. Ces travaux reposent notamment sur ceux de Bramson [Bra78, Bra83], Chauvin-Rouault [CR88, CR90], Lalley-Sellke [LS87] et McKean [McK75]. Ils s'inspirent également en partie des travaux de Brunet-Derrida [BD09, BD11].

Plusieurs des propriétés du mouvement brownien branchant vu depuis un extremum sont conjecturées dans d'autres modèles, notamment le champ libre gaussien en dimension 2 [BDG01, BDZ11, BDZ13, BZ11, DZ12], le temps de recouvrement de graphes par des marches aléatoires [Dem06, DPRZ04] et, plus généralement, les champs gaussiens exhibant des corrélations logarithmiques [AZ12, CLD01, DRSV12, FB08]. Nous ne développerons pas ces aspects dans cet exposé.

Je remercie Élie Aïdékon, Louis-Pierre Arguin, Julien Berestycki, Anton Bovier, Éric Brunet, Nicola Kistler et Zhan Shi pour leurs réponses à mes questions et pour leurs commentaires sur le manuscrit.

2. COMPORTEMENT ASYMPTOTIQUE DU MAXIMUM

2.1. Résultats

Nous donnons principalement dans cette partie des résultats classiques sur le comportement asymptotique du maximum $X_1(t)$.

Notons med(t) la médiane du maximum $X_1(t)$ à l'instant t. Notons $v(t,\cdot)$ sa fonction de répartition. Elle est définie par (1) et elle vérifie l'équation F-KPP (2). Les résultats de Kolmogorov-Petrovsky-Piscounov [KPP37] affirment l'existence d'une variable aléatoire non triviale W et d'un terme de centralisation $m(t) \sim \sqrt{2}$ tels que :

$$X_1(t) - m(t) \to W \text{ en loi.} \tag{3}$$

La fonction de répartition w de W est solution de

$$\frac{1}{2}w'' + \sqrt{2}w' + w^2 - w = 0.$$

Les solutions non triviales de cette équation sont uniques à translation près. Il existe une constante $C_w > 0$ (Bramson [Bra83]) telle que :

$$1 - w(x) = P(W > x) \sim_{x\to+\infty} C_w x e^{-\sqrt{2}x}. \tag{4}$$

Bramson [Bra83] a établi que l'on pouvait prendre pour m la fonction définie par :

$$m(t) = \sqrt{2}t - \frac{3}{2\sqrt{2}}\ln(t). \tag{5}$$

Ainsi, il existe une constante C_{med} telle que :

$$\text{med}(t) = \sqrt{2}t - \frac{3}{2\sqrt{2}}\ln(t) + C_{\text{med}} + o(1). \tag{6}$$

On définit une martingale (pour la filtration naturelle du mouvement brownien branchant) en posant, pour tout $t \geqslant 0$:

$$Z(t) = \sum_{k=1}^{N(t)} \big(\sqrt{2}t - X_k(t)\big) e^{-\sqrt{2}\left(\sqrt{2}t - X_k(t)\right)}. \tag{7}$$

Lalley et Sellke [LS87] ont établi la convergence presque sûre de $Z(t)$ vers une variable aléatoire finie et strictement positive Z ainsi que la convergence presque sûre suivante :

$$\lim_{s\to\infty} \lim_{t\to\infty} P(X_1(t+s) - m(t+s) \leqslant x | \mathcal{F}_s) = \exp(-C_w Z e^{-\sqrt{2}x}) \text{ p.s.} \tag{8}$$

On en déduit la représentation intégrale suivante :

$$w(x) = P(W \leqslant x) = E\big(\exp\big(-C_w Z e^{-\sqrt{2}x}\big)\big). \tag{9}$$

Écrivons

$$\exp(-C_w Z e^{-\sqrt{2}x}) = \exp\big(-e^{-\sqrt{2}(x - 2^{-1/2}\ln(C_w Z))}\big).$$

Conditionnellement à Z, c'est la fonction de répartition d'une distribution de Gumbel. La convergence (8) peut par conséquent s'interpréter de la manière suivante. La variable aléatoire $X_1(t) - m(t)$ converge vers la somme de deux termes : le terme $2^{-1/2}\ln(C_w Z)$ qui provient de l'histoire du processus avant sa stabilisation en loi ; un terme de fluctuation aléatoire qui suit une loi de Gumbel. Plus précisément, Lalley et Sellke ont conjecturé la convergence en loi et la convergence en moyenne ergodique de l'ensemble du processus vu depuis $m(t) + 2^{-1/2}\ln(C_w Z)$. Arguin-Bovier-Kistler et Aïdékon-Berestycki-Brunet-Shi ont établi indépendamment ces conjectures et ont donné deux descriptions différentes du processus limite.

Signalons pour conclure cette partie qu'un résultat récent de Roberts [Rob11] décrit le comportement presque sûr du maximum. On a :

$$\liminf_{t\to\infty} \frac{X_1(t) - \sqrt{2}t}{\ln(t)} \to -\frac{3}{2\sqrt{2}} \text{ presque sûrement}$$

mais

$$\limsup_{t\to\infty} \frac{X_1(t) - \sqrt{2}t}{\ln(t)} \to -\frac{1}{2\sqrt{2}} \text{ presque sûrement.}$$

Ces résultats sont les analogues en temps continus de résultats obtenus peu auparavant par Hu et Shi [HS09].

2.2. Quelques arguments

Nous donnons dans cette partie les principaux arguments menant au résultat suivant :

$$\operatorname{med}(t) = \sqrt{2}t - \frac{3}{2\sqrt{2}}\ln(t) + O(1). \tag{10}$$

C'est une version faible de (6). Elle a été établie pour la première fois par Bramson [Bra78]. Une preuve courte a été fournie par Roberts [Rob11]. Cette partie s'inspire en particulier de ce dernier article et de l'article de Addario-Berry et Reed [ABR09].

Commençons par étudier le cas élémentaire où les particules sont indépendantes. Plus précisément, donnons-nous, conditionnellement à $N(t)$, $N(t)$ particules de positions gaussiennes indépendantes centrées et de variance t. Notons $X_1^*(t) \geqslant X_2^*(t) \geqslant \cdots \geqslant X_{N(t)}^*(t)$ les positions ordonnées des particules. Désignons par $\mathrm{med}^*(t)$ la médiane de $X_1^*(t)$. La médiane admet le développement asymptotique suivant :

$$\mathrm{med}^*(t) = \sqrt{2}t - \frac{1}{2\sqrt{2}} \ln(t) + O(1).$$

Ce résultat est élémentaire. Il peut par exemple être obtenu par des considérations sur les deux premiers moments de $N_{q(t)}^*(t)$, le nombre de particules au-dessus de $q(t)$ à l'instant t :

$$N_{q(t)}^*(t) = \sum_{k=1}^{N(t)} 1_{X_k^*(t) \geqslant q(t)}.$$

On a :

$$\frac{E(N_{q(t)}^*(t))^2}{E(N_{q(t)}^*(t)^2)} \leqslant P(N_{q(t)}^*(t) \geqslant 1) \leqslant E(N_{q(t)}^*(t)).$$

L'indépendance entre les particules permet de comparer utilement le second moment et le carré du premier moment. La détermination, à une constante additive près, de la médiane $\mathrm{med}^*(t)$ est alors essentiellement ramenée à la détermination du réel $q(t)$ pour lequel le premier moment est d'ordre 1. Prenons $q(t)$ de la forme $\sqrt{2}t - a(t)$ où $a(t)$ est négligeable devant $\sqrt{t}$. On a :

$$E\big(N_{q(t)}^*(t)\big) \sim \frac{1}{2\sqrt{\pi t}} e^{t - \frac{q(t)^2}{2t}} \sim \frac{1}{2\sqrt{\pi t}} e^{a(t)\sqrt{2}}. \tag{11}$$

Cette quantité est d'ordre 1 pour tout t grand lorsque

$$a(t) = \frac{1}{2\sqrt{2}} \ln(t).$$

Cela permet d'obtenir le développement asymptotique souhaité pour $\mathrm{med}^*(t)$.

Revenons maintenant au cas du mouvement brownien branchant. Notons que la variable aléatoire

$$N_{q(t)}(t) = \sum_{k=1}^{N(t)} 1_{X_k(t) \geqslant q(t)}$$

admet le même premier moment que la variable aléatoire $N_{q(t)}^*(t)$. Le premier moment de $N_{q(t)}(t)$ ne donne par contre pas ici une information précise sur la probabilité

$P(X_1(t) \geqslant q(t))$. En effet, si une particule parvient au-delà de $q(t)$ à l'instant t, plusieurs de ses ancêtres sont probablement à une altitude élevée et plusieurs de leurs descendants sont donc probablement au-delà de $q(t)$. Ainsi, le $q(t)$ pour lequel $E(N_{q(t)}(t))$ est d'ordre 1 surestime la valeur de la médiane $\mathrm{med}(t)$ de $X_1(t)$.

À un instant $s \leqslant t$, l'espérance du nombre de particules du mouvement brownien branchant est e^s. En appliquant brutalement une borne de premier moment on obtient donc que, à l'instant s, les particules ne peuvent pas être très loin au-dessus de $\sqrt{2}s$. L'une des idées est de rajouter ce type de contraintes sur la trajectoire des particules d'intérêt. Plus précisément, appelons particule basse une particule au-delà de $q(t)$ à l'instant t et dont la trajectoire est restée en dessous de la droite $s \mapsto q(t)st^{-1} + 2$. Appelons particule haute une particule au-delà de $q(t)$ à l'instant t et dont la trajectoire a touché la droite d'équation $s \mapsto q(t)st^{-1} + 1$. Notons $B_{q(t)}(t)$ le nombre de particules basses et $H_{q(t)}(t)$ le nombre de particules hautes. On a :

$$\frac{E(B_{q(t)}(t))^2}{E(B_{q(t)}(t)^2)} \leqslant P(B_{q(t)}(t) \geqslant 1) \leqslant P(N_{q(t)}(t) \geqslant 1) \leqslant E(B_{q(t)}(t)) + P(H_{q(t)}(t) \geqslant 1).$$

La majoration sur la position des ancêtres des particules basses permet de majorer efficacement l'espérance de $B_{q(t)}(t)$ conditionnellement à l'existence d'une particule basse. Cela permet – pour des choix de $q(t)$ pertinents – de contrôler le second moment de $B_q(t)$ par le carré de son premier moment. Par ailleurs, toute particule haute admet un ancêtre sur la droite d'équation $s \mapsto q(t)st^{-1} + 1$. Cela permet – toujours pour des choix de $q(t)$ pertinents – de minorer l'espérance de $B_{q(t)}(t)$ conditionnellement à l'existence d'une particule haute. La probabilité d'existence d'une particule haute peut ainsi être contrôlée par l'espérance de $B_{q(t)}(t)$. La conclusion est que la détermination de la médiane $\mathrm{med}(t)$ de $X_1(t)$ se ramène à la détermination du paramètre $q(t)$ pour lequel le premier moment de $B_q(t)$ est d'ordre 1.

Estimons maintenant $B_{q(t)}(t)$. Essentiellement, l'introduction de la contrainte sur la trajectoire divise par t le premier moment :

$$E(B_{q(t)}(t)) \sim \frac{C}{t} E(N_{q(t)}(t)) = \frac{C}{t} E(N^*_{q(t)}(t)). \tag{12}$$

Le facteur $1/t$ se comprend facilement dans un cadre discret en temps avec des événements légèrement différents. Si $X_1, \ldots, X_t$ sont des v.a.i.i.d. de loi commune diffuse, alors :

$$P\left(X_1 + \cdots + X_s \leqslant \frac{s}{t}\, X_t \text{ pour tout } s \leqslant t \middle| X_1 + \cdots + X_t \geqslant q(t)\right) = \frac{1}{t}.$$

La preuve est une conséquence des deux remarques suivantes : les rotations des X_i laissent invariant l'événement par lequel on conditionne ; l'autre événement est vérifié pour une unique rotation des X_i. Rappelons que $N_{q(t)}(t)$ et $N^*_{q(t)}(t)$ ont le même