Séminaire BOURBAKI Mars 2013
65e année, 2012-2013, n° 1068, p. 293 à 317

# MODÈLES ET LAMINATIONS TERMINALES
## [d'après Minsky et Brock-canary-Minsky]

par **Cyril LECUIRE**

## INTRODUCTION

En paraphrasant Minsky, on peut dire que la conjecture des laminations terminales répond à la question suivante : est-ce qu'une variété hyperbolique de dimension 3 dont le groupe fondamental est de type fini est uniquement déterminée par sa géométrie asymptotique ? Les travaux sur les invariants de bouts initiés d'une part par Ahlfors et Bers et d'autre part par Thurston permettent, d'une certaine façon, de quantifier cette géométrie asymptotique et de donner un énoncé précis à cette conjecture.

Jetons un coup d'œil à ces invariants. Soit $N$ une variété hyperbolique de dimension 3 dont le groupe fondamental est de type fini. C'est-à-dire que $N$ est une variété de dimension 3 orientable munie d'une métrique riemannienne complète dont toutes les courbures scalaires sont égales à $-1$. D'après la conjecture dite de sagesse, prouvée par Agol et Calegary-Gabai ([Ag] et [CG]), $N$ est homéomorphe à l'intérieur d'une variété compacte $M$. Pour simplifier, supposons que $N$ n'a pas de pointes paraboliques. Dans ce cas, comme nous le verrons dans la section 1.1, les bouts de $N$ sont en correspondance avec les composantes de $\partial M$. Ces bouts sont classés en deux types auxquels sont associés deux types d'invariants. À un bout *géométriquement fini* (voir partie 1 pour les définitions) est associée une structure conforme sur la composante de $\partial M$ correspondante et à un bout *géométriquement infini* est associée une lamination géodésique (elle aussi sur la composante correspondante de $\partial M$). La collection des structures conformes et des laminations géodésiques ainsi produites par les bouts de $N$ constitue ce qu'on appelle les *invariants de bouts de N*. Remarquons que ces invariants vivent sur $\partial M$, on peut donc comparer les invariants de bouts de deux variétés hyperboliques différentes pourvu qu'elles soient homéomorphes à l'intérieur de la même variété compacte. On dit que deux telles variétés ont *le même type topologique*. La conjecture des laminations terminales (qui est désormais un théorème), énoncée par Thurston ([Th2]), se formule de la manière suivante.

Théorème 0.1 (Théorème des laminations terminales). — *Une variété hyperbolique dont le groupe fondamental est de type fini est uniquement déterminée par son type topologique et ses invariants de bouts.*

En d'autres termes, deux variétés hyperboliques $N$ et $N'$ qui sont homéomorphes et ont les mêmes invariants de bouts sont isométriques (par une isométrie dans la classe d'homotopies de l'homéomorphisme entre $N$ et $N'$).

Un certain nombre de cas particuliers ont été traités par Minsky ([Mi1], [Mi2], [Mi3]) et une preuve pour toutes les variétés indécomposables est donnée dans [Mi4] et [BCM1]. Les arguments pour le cas général sont désormais connus et largement acceptés bien que l'article correspondant soit encore en cours de rédaction. Bowditch a donné une preuve différente bien que suivant le même schéma général ([Bow3], [Bow4] et [Bow5]), c'est-à-dire que sa preuve repose aussi sur la construction d'une variété modèle (qui est différente de celle de Minsky). Une approche différente, au sens où elle n'introduit pas de variété modèle, a été annoncée dans [BB1].

Dans cet exposé, nous allons essayer de donner aux lecteurs des éléments pour comprendre comment obtenir des informations sur la géométrie d'une variété hyperbolique à partir de ses invariants de bouts et à quoi peut servir le type d'informations ainsi acquises. Après avoir défini les bouts et leurs invariants, nous expliquerons des résultats de Minsky et Bowditch qui font le lien entre des propriétés géométriques d'une variété hyperbolique et ses invariants de bouts. Ceci nous conduira naturellement à expliquer, dans un cas simple, la construction de la variété modèle de Minsky. Nous présenterons ensuite un certain nombre de résultats dont les preuves utilisent cette variété modèle ou des variantes.

## 1. BOUTS DES VARIÉTÉS HYPERBOLIQUES DE DIMENSION 3

Dans cette première partie, nous allons définir les bouts des variétés hyperboliques, leurs types et leurs invariants. Nous décrirons ensuite deux exemples classiques pour illustrer ces concepts et nous conclurons par un aperçu de la preuve du théorème des laminations terminales.

### 1.1. Bouts relatifs aux pointes paraboliques

En suivant Bonahon ([Bon]), nous allons partir de la définition de Freudenthal (voir [Fr]) d'un bout d'un espace topologique $X$. Un bout $b$ de $X$ est une famille d'ouverts connexes $(U_i)_{i\in I}$ avec les propriétés suivantes :

(1) Pour tout $i$, $U_i$ est de frontière compacte mais n'est pas relativement compacte.

(2) Pour tous $i$ et $j$, il existe $k$ tel que $U_k$ est contenu dans $U_i \cup U_j$.

(3) La famille $(U_i)_{i\in I}$ est maximale pour les propriétés 1 et 2.

On munit l'union de $X$ et de l'ensemble de ses bouts d'une topologie en prenant pour voisinage d'un bout $b = (U_i)_{i\in I}$ la famille des ouverts $U_i \cup b$. Par abus de langage on appellera voisinage du bout $b$ dans $X$ chacun des ouverts $U_i$.

Nous noterons $\mathbb{H}^3$ l'espace hyperbolique de dimension 3, *i.e.* l'unique variété hyperbolique simplement connexe de dimension 3. Le revêtement universel de toute variété hyperbolique $N$ de dimension 3 est isométrique à $\mathbb{H}^3$. Le choix d'une telle isométrie induit une représentation $\rho : \pi_1(M) \to Isom(\mathbb{H}^3)$. On déduit du lemme de Margulis ([KM]) qu'il existe une collection $\rho(\pi_1(M))$-invariante d'horoboules dans $\mathbb{H}^3$ qui sont deux à deux disjointes et « centrées » aux points fixes des isométries paraboliques de $\rho(\pi_1(M))$. La projection de chacune de ses horoboules sur $N$ est un *voisinage d'une pointe parabolique*. Un tel voisinage est homéomorphe au produit d'une demi-ligne $(0, \infty)$ avec soit un tore de dimension 2, soit un anneau ouvert. La réunion de ces voisinages des pointes dans $N$ est appelée la *partie cuspidale* de $N$ et son complémentaire la *partie non-cuspidale*, que nous noterons $N_0$. Un bout de $N$ relatif aux pointes paraboliques est un bout de la partie non-cuspidale $N_0$. Dans la suite nous considérerons uniquement des bouts relatifs aux pointes paraboliques et nous les appellerons simplement bouts de $N$.

Un *cœur* pour une variété $M$ (non-compacte) de dimension 3 est une sous-variété $C \subset M$ telle que l'inclusion $C \hookrightarrow M$ est une équivalence d'homotopie. Lorsque le groupe fondamental de $M$ est de type fini, un théorème de Scott ([Sc]) garantit l'existence d'un cœur compact. Un tel cœur compact n'est pas unique mais McCullough, Miller et Swarup ([MMS]) ont démontré que deux cœurs compacts différents sont homéomorphes. Remarquons que deux tels cœurs ne sont cependant pas nécessairement isotopes, par exemple un cœur compact dans un bretzel ouvert peut être noué.

Pour une variété hyperbolique $N$, un *cœur compact relatif (aux pointes paraboliques)* $C \subset N_0$ est un cœur compact qui est bien positionné vis-à-vis des pointes paraboliques, c'est-à-dire que l'inclusion $(C, C \cap \partial N_0) \hookrightarrow (N_0, \partial N_0)$ est une équivalence d'homotopie. L'existence d'un cœur compact relatif a été démontrée par McCullough ([Mc]).

Étant donné un cœur compact relatif $C$, chaque composante de $N_0 - C$ est un voisinage d'un bout de $N$. On a ainsi une correspondance biunivoque entre les bouts de $N$ et les composantes de $N_0 - C$ (voir [Bon]) et donc entre les bouts de $N$ et les composantes de $\partial C - (C \cap \partial N_0)$.

Un bout de $N$ est *topologiquement sage* s'il a un voisinage homéomorphe à $S \times (0, \infty)$, $S$ étant une surface de type fini. Dans les années 70, Marden a conjecturé qu'une variété hyperbolique $N$ dont le groupe fondamental est de type fini est homéomorphe à l'intérieur d'une variété compacte. Cette conjecture, dite de sagesse, a été résolue indépendamment par Agol et Calegary-Gabai ([Ag] et [CG]). Il s'ensuit que tous les bouts d'une variété hyperbolique dont le groupe fondamental est de type fini sont topologiquement sages.

Soit $N$ une variété hyperbolique de volume infini dont le groupe fondamental est de type fini. D'après ce qu'on vient de voir, $N$ est homéomorphe à l'intérieur d'une variété compacte $M$. De plus $N$ possède un cœur compact relatif $C$ homéomorphe à $M$. Ceci nous permet de plonger $\partial C - (C \cap \partial N_0)$ dans $\partial M$ et d'obtenir une correspondance biunivoque entre les bouts de $N$ et des sous-surfaces disjointes de $\partial M$ de façon que chaque bout $b$ est homéomorphe à $S \times (0, \infty)$, $S$ étant la sous-surface de $M$ correspondant au bout $b$.

Un bout de $N$ est *géométriquement fini* s'il a un voisinage qui ne rencontre aucune géodésique fermée. Si tout voisinage d'un bout $b$ rencontre une géodésique fermée alors $b$ est *géométriquement infini.* Dans les deux sections qui suivent nous allons définir les invariants associés à chacun de ces types de bouts.

### 1.2. Invariants des bouts géométriquement finis

Un groupe kleinien est un sous-groupe discret de $PSL(2,\mathbb{C})$. Comme $PSL(2,\mathbb{C})$ est le groupe des isométries de $\mathbb{H}^3$ qui préservent l'orientation, toute variété hyperbolique est isométrique au quotient de $\mathbb{H}^3$ par un groupe kleinien sans torsion et, réciproquement, le quotient de $\mathbb{H}^3$ par un groupe kleinien sans torsion est une variété hyperbolique. Dans la suite nous supposerons par défaut que les groupes kleiniens que nous considérons sont sans torsion, de covolume infini et ne sont pas abéliens.

Prenons pour $\mathbb{H}^3$ le modèle de la boule unité ouverte $\mathrm{int}(B^3) \subset \mathbb{R}^3$. *L'ensemble limite* $\Lambda_\Gamma$ d'un groupe kleinien $\Gamma$ est l'adhérence dans $S^2_\infty = \partial B^3$ (la sphère à l'infini) de l'orbite d'un point de $\mathrm{int}(B^3)$. Le domaine de discontinuité $\Omega_\Gamma$ de $\Gamma$ est le complémentaire dans $S^2_\infty$ de $\Lambda_\Gamma$. Un élément de $PSL(2,\mathbb{C})$ (ou *transformation de Möbius*) est à la fois une isométrie de $\mathbb{H}^3$ qui préserve l'orientation et une transformation conforme de $S^2_\infty = \hat{\mathbb{C}}$. Le groupe kleinien $\Gamma$ agit donc sur $S^2_\infty$ par transformations conformes. Cette action est proprement discontinue sur $\Omega_\Gamma$. Il s'ensuit que le quotient $\Omega_\Gamma/\Gamma$ est une surface de Riemann. D'après un théorème d'Ahlfors ([Ah]), si $\Gamma$ est de type fini, alors $\Omega_\Gamma/\Gamma$ est une union finie de surfaces de type fini. On peut voir $\Omega_\Gamma/\Gamma$ comme le bord à l'infini $\partial_\infty N$ de la variété quotient $N = \mathbb{H}^3/\Gamma$.

Le cœur convexe $C(\Gamma)$ de la variété quotient $\mathbb{H}^3/\Gamma$ est le quotient de l'enveloppe convexe $E(\Lambda_\Gamma)$ de l'ensemble limite de $\Gamma$. Il n'est pas très difficile de montrer qu'un bout de $\mathbb{H}^3/\gamma$ est géométriquement fini si et seulement s'il a un voisinage disjoint de $C(\Gamma)$. De plus on peut choisir un cœur compact relatif $C_0$ de façon à ce que $\partial C(\Gamma) \cap N_0$ soit une réunion de composantes connexes de l'adhérence de $\partial C_0 - \partial N_0$. On a ainsi une correspondance biunivoque entre les bouts géométriquement finis de $\mathbb{H}^3/\Gamma$ et les composantes connexes de $\partial C(\Gamma)$.

Notons $\mathcal{V}_\epsilon \subset \mathbb{H}^3$ l'ensemble des points de $\mathbb{H}^3$ à distance au plus $\epsilon$ de $E(\Lambda_\Gamma)$ ; cet ensemble est strictement convexe et pour $\epsilon$ petit, son quotient $\mathcal{V}_\epsilon/\Gamma$ est homéomorphe au cœur convexe $C(\Gamma)$. De la stricte convexité de $\mathcal{V}_\epsilon$ on déduit que chaque point de $\Omega_\Gamma$ est le « centre » (*i.e.* le point de contact avec $S^2\infty$) d'une horoboule qui est tangente à $\mathcal{V}_\epsilon$ en un (unique) point. L'application qui envoie chaque point de $\Omega_\Gamma$ sur cet unique point de tangence fournit un homéomorphisme $\Gamma$-équivariant entre $\Omega_\Gamma$ et $\partial\mathcal{V}_\epsilon$. On en déduit un homéomorphisme entre $\Omega_\Gamma/\Gamma$ et $\partial C(\Gamma) \hookrightarrow C_0$. Ainsi à chaque bout géométriquement fini de la variété quotient est associée une structure conforme sur une composante de $\partial C(\Gamma) \hookrightarrow C_0$ appelée *structure conforme à l'infini.*

### 1.3. Invariants des bouts géométriquement infinis

L'invariant associé à un bout géométriquement fini est une lamination géodésique. Commençons par définir un tel objet.

Soit $S$ une surface munie d'une métrique hyperbolique complète de volume fini. Une *lamination géodésique* $L \subset S$ est un fermé qui est réunion disjointe de géodésiques complètes plongées dans $S$. Une géodésique complète plongée contenue dans $L$ est une *feuille* de $L$. L'exemple le plus simple de lamination géodésique est une géodésique fermée simple mais, génériquement, l'intersection d'une lamination géodésique et d'un arc est un ensemble de Cantor. Une lamination géodésique $L$ est minimale si toute feuille de $L$ est dense dans $L$. Toute lamination géodésique est la réunion d'un nombre fini de laminations minimales et de feuilles isolées.

Ainsi définie, une lamination géodésique dépend de la métrique choisie sur $S$. Le lemme classique suivant permet de s'abstraire de cette dépendance.

LEMME 1.1. — *Soient $s_1$ et $s_2$ deux métriques hyperboliques complètes d'aires finies sur $S$. Alors il existe un homéomorphisme naturel entre l'espace des laminations géodésiques pour la métrique $s_1$ et l'espace des laminations géodésiques pour la métrique $s_2$ (ces deux espaces étant munis de la topologie de Hausdorff).*

Un bout de $N$ est *simplement dégénéré* s'il a un voisinage $U$ homéomorphe à $S\times(0,\infty)$ et s'il existe une suite de surfaces $f_n : S \to U$ hyperboliques (*i.e.* la métrique sur $S$ induite par $f_n$ est hyperbolique) qui sort de tout compact et telle que $f_n(S)$ est homotope à $S\times\{0\}$. Thurston, Bonahon et Canary ([Th1], [Bon], [Ca]) ont montré que tout bout topologiquement sage et géométriquement infini est simplement dégénéré. En combinant ce résultat avec la résolution de la conjecture de sagesse mentionnée plus haut, on déduit qu'un bout géométriquement infini d'une variété hyperbolique dont le groupe fondamental est de type fini est simplement dégénéré. Pour un tel bout, on considère une suite $c_n \subset S$ de courbes fermées simples telle que la longueur de $f_n(c_n)$ est bornée (l'existence d'une telle suite de courbes est garantie par le lemme de Bers, [Be]). On extrait ensuite une sous-suite de manière que $c_n$ converge pour la topologie de Hausdorff. La limite de $\{c_n\}$ est une lamination géodésique qui contient une unique sous-lamination minimale $\lambda_b$. Bonahon ([Bon]) a montré que $\lambda_b$ ne dépend