Séminaire BOURBAKI Mars 2013
65^e année, 2012-2013, n^O 1070, p. 343 à 366

LE SPECTRE DISCRET DES GROUPES CLASSIQUES [d'après J. Arthur]

par **Colette MOEGLIN**

Il s'agit dans ce court exposé de donner une idée de plusieurs milliers de pages de travaux de J. Arthur, ceci ne peut donc être que très partiel. À la demande des organisateurs, le choix s'est porté sur le cas particulier des groupes symplectiques et orthogonaux, qui sont ceux pour lesquels J. Arthur a obtenu les résultats les plus complets et on se limite, de plus, à une description grossière des résultats, ce qui n'en éclaire pas la profondeur.

Sur ce sujet difficile, où l'oubli d'un seul mot rend le résultat faux, il existe toutefois des présentations relativement abordables. J. Arthur lui-même a expliqué dès les années 80, comment des compatibilités entre les conjectures existantes impliquent ses résultats [3], [4] et [5]. L'ensemble des articles écrits par J. Arthur sont disponibles sur la page [10]. Et la référence majeure pour l'exposé ci-dessus est [9] où l'introduction fait, entre autres, un historique du sujet et le premier chapitre fait en cinquante pages un exposé précis des résultats dont je vais parler ici.

Les groupes considérés ici sont la composante connexe du groupe d'automorphismes d'une forme bilinéaire non dégénérée symétrique ou antisymétrique sur un espace vectoriel de dimension finie sur un corps de nombres, c'est-à-dire une extension de degré fini du corps $\mathbb{Q}$. La question de départ est de connaître la décomposition spectrale des quotients arithmétiques de ce groupe. Le résultat général est dû à Langlands [24] et ramène cette étude à celle des sous-représentations irréductibles dans cet espace de fonctions ainsi qu'à l'étude analogue pour des sous-groupes assez particuliers. Il est plus facile d'expliquer la situation dans le cadre adélique, qui est une situation limite du cadre classique, limite sur les quotients arithmétiques *via* les projections naturelles ; revenir du cadre adélique au cas des quotients arithmétiques pose de difficiles problèmes non réellement résolus.

On note k le corps de nombres considéré et $\mathbb{A}$ son anneau des adèles, c'est-à-dire le produit restreint des complétés de k pour toutes les valuations, p-adiques et archimédiennes de k. Par exemple si $k = \mathbb{Q}$, alors $\mathbb{A}$ est le sous-anneau du produit de $\mathbb{R}$ avec le produit des corps p-adiques $\mathbb{Q}_p$, où p parcourt l'ensemble des nombres premiers, sous-anneau formé des éléments dont la composante en p est un entier p-adique pour tout nombre premier p sauf un nombre fini d'entre eux.

On fixe un k-espace vectoriel de dimension finie, V, muni d'une forme orthogonale ou symplectique, non dégénérée. L'existence d'une forme symplectique nécessite évidemment que la dimension de V soit paire et il n'y a alors qu'une seule forme (à conjugaison près) ; on note $G = \mathrm{Sp}(2n)$ le groupe d'automorphismes de cette forme où $2n = \dim V$. Par contre, pour l'existence d'une forme orthogonale, il n'y a pas de restriction sur la dimension. Mais dans ce dernier cas il n'y a pas qu'une seule forme possible (à conjugaison près). Pour simplifier, ici nous ne considérons que les formes ayant un noyau anisotrope de dimension au plus 2, c'est-à-dire :

– si $\dim V =: 2n+1$ est impaire, on considère les formes $\eta x_0^2+\sum_{i\in[1,n]} x_i x_{2n-i+1}$ où η est un élément de k^*. Dans ce cas, on note $\mathrm{SO}(2n+1)$ le groupe des automorphismes de cette forme, de déterminant 1 ; ce groupe ne dépend pas de η ;

– si $\dim V =: 2n$ est paire, on considère les formes $\sum_{i\in[1,n-1]} x_i x_{2n-i+1} + x_n^2 - \eta x_{n+1}^2$, où η est un élément de k^*. Dans ce cas, le groupe d'automorphismes de la forme dépend de η (ou plutôt de sa classe modulo les carrés de k^*). On note k' l'extension de degré au plus 2 de k tel que η soit un carré dans cette extension. Et pour alléger les notations, on note encore $\mathrm{SO}(2n)$ le groupe des automorphismes de la forme décrite, de déterminant 1, oubliant k'.

Et pour unifier les notations, on note G l'un des groupes qui viennent d'être décrits, $G(k)$ l'ensemble de ses points sur k (les matrices de déterminant 1 à coefficients dans k et respectant la forme bilinéaire) et $G(\mathbb{A})$ l'ensemble des points adéliques de G, c'est-à-dire l'ensemble des matrices de déterminant 1, respectant la forme bilinéaire fixée et à coefficients dans $\mathbb{A}$. Il faut voir $G(\mathbb{A})$ comme un produit sur toutes les places v de k (tous les nombres premiers p, et la place ∞, si $k = \mathbb{Q}$) des groupes $G(k_v)$ où, sauf pour un ensemble fini de places, noté génériquement S, incluant les places archimédiennes, l'élément en la place considérée est à coefficients dans l'anneau des entiers de k_v ; évidemment $G(k_v)$ est le groupe des matrices de déterminant 1 respectant la forme considérée et dont les coefficients sont des éléments de k_v.

Le groupe $G(\mathbb{A})$ possède une mesure de Haar qui donne une mesure sur le quotient $G(k)\backslash G(\mathbb{A})$; pour cette mesure, ce quotient est de volume fini. On considère l'espace vectoriel des fonctions de carré intégrable sur ce quotient. Le groupe $G(\mathbb{A})$ y opère par translations à droite. Par définition, le spectre discret de G est la somme des sous-représentations irréductibles de cette représentation (*irréductible* signifie qui se réalise dans un sous-espace fermé et qui ne se coupe pas en deux sous-représentations dans des sous-espaces fermés propres). Le but est de décrire ce spectre discret. En fait, il est sans espoir d'obtenir une description réellement explicite, mais Arthur réussit à calculer (à une légère exception près) la multiplicité de chaque représentation irréductible dans cet espace et à décrire ces représentations en termes de représentations cuspidales de groupes $\mathrm{GL}(m)$, le groupe des automorphismes linéaires de k^m avec $m \leqslant \dim V + 1$.

Une représentation cuspidale, irréductible, de $\mathrm{GL}(m)$ est une sous-représentation irréductible de $\mathrm{GL}(m,\mathbb{A})$ dans l'ensemble des fonctions sur $\mathrm{GL}(m,k)\backslash\mathrm{GL}(m,\mathbb{A})$, se transformant suivant un caractère central unitaire sous l'action du centre de $\mathrm{GL}(m,\mathbb{A})$ et engendré par des fonctions f nulles aux pointes, ce qui veut dire que pour tout entier $m'<m$, donnant lieu à une décomposition $k^m=k^{m'}\oplus k^{m-m'}$, en notant $U_{m,m'}$ le groupe des matrices $\mathrm{Id}_{k^m}+\mathrm{Hom}_k(k^{m'},k^{m-m'})$, l'intégrale $\int_{U_{m,m'}(k)\backslash U_{m,m'}(\mathbb{A})} d\,u\, f(ug)$ est nulle pour presque tout $g\in\mathrm{GL}(m,\mathbb{A})$; l'intégrale est convergente car on intègre sur un espace compact.

Ces représentations cuspidales des groupes $\mathrm{GL}(m)$ sont les briques élémentaires de la théorie des formes automorphes d'après la fonctorialité de Langlands. C'est ce programme de fonctorialité que J. Arthur réalise pour les groupes G décrits précédemment (en fait sans restriction sur la nature de la forme bilinéaire orthogonale) et avec des méthodes suffisamment générales pour que d'autres groupes soient atteignables sans difficultés supplémentaires. Et c'est ce que je vais essayer d'expliquer ci-dessous.

Un des attraits du sujet est son interaction avec la théorie des nombres dont certains sujets ont aussi comme briques élémentaires les représentations cuspidales des groupes $\mathrm{GL}(m)$; il s'agit de les utiliser pour obtenir des renseignements sur les groupes de Galois et les représentations de ces groupes, ce qui est une des motivations de la théorie de Langlands. Relativement récemment, Harris a donné un exposé à peu près exhaustif des résultats connus utilisables pour les applications arithmétiques [15] et il y a expliqué ce que ces résultats permettaient actuellement de faire, par exemple, pour construire des systèmes ℓ-adiques de représentations galoisiennes. Je n'aborderai absolument pas ces questions ici.

1. REPRÉSENTATIONS

On garde les notations $G,k,\mathbb{A}$ de l'introduction. Soit S un ensemble fini de places de k contenant les places archimédiennes et les valuations 2-adiques ; on note $G(\mathcal{O}^S)$ le sous-groupe de $G(\mathbb{A})$ formé des éléments qui valent l'identité en toute place dans S et qui sont à coefficients dans l'anneau des entiers de k_v pour toute place v non dans S ; c'est un groupe compact. Ce groupe intervient dans la définition de $G(\mathbb{A})$ puisque $G(\mathbb{A})$ est l'union sur tous les choix de S des produits $G(\mathcal{O}^S)\times_{v\in S}G(k_v)$, avec la structure de groupe évidente. Pour que les résultats qui sont décrits ci-dessous incluent aussi le cas des valuations 2-adiques, il faudrait changer la forme orthogonale fixée pour définir $SO(2n)$, ce que nous ne ferons pas.

Par contre on oublie l'espace des fonctions $L^2(G(k)\backslash G(\mathbb{A}))$, car on admet sans explication que l'on sait calculer la trace sur les représentations irréductibles qui y apparaissent sans les réaliser dans cet espace, *via* la formule des traces.

1.1. Composantes locales

On va donc voir apparaître ci-dessous des représentations irréductibles de $G(\mathbb{A})$, notées généralement π, de façon assez abstraite : si π est réalisée dans un espace W, W est un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension en général infinie (seuls les caractères de $G(\mathbb{A})$ triviaux sur $G(k)$ font exception). La représentation de $G(\mathbb{A})$ dans W est continue, donc elle est localement constante chaque fois qu'on la restreint à un sous-groupe de la forme $G(k_v)$ avec v une place non archimédienne fixée. Pour $w \in W - \{0\}$ fixé, non nul, et pour une place v fixée, le sous-espace engendré par w sous $G(k_v)$ définit une représentation de $G(k_v)$ (j'oublie quelques subtilités aux places archimédiennes) ; cette représentation est une somme finie de représentations irréductibles toutes isomorphes et on note π_v la classe d'isomorphie de représentations ainsi définie. Celle-ci est indépendante du choix de $w \in W - \{0\}$. C'est la composante locale de π en la place v.

En une place non archimédienne v, se donner une représentation irréductible continue de $G(k_v)$ ou se donner une représentation irréductible de l'algèbre (pour la convolution) des fonctions localement constantes à support compact sur $G(k_v)$ est équivalent ; on utilise ce deuxième point de vue dans les paragraphes qui suivent.

1.2. Représentations non ramifiées et algèbre de Hecke sphérique

De plus, w étant toujours fixé, il existe (par continuité) un ensemble fini S de places de k contenant les places archimédiennes et les places où la caractéristique résiduelle de k_v est deux, tel que w soit fixe sous le groupe compact $G(\mathcal{O}^S)$. Ainsi si v est une place de k non dans S, la représentation π_v a des vecteurs fixes sous le compact $G(\mathcal{O}_v)$; on suppose que k' défini dans l'introduction dans le cas des groupes orthogonaux pairs est, en la place v, une extension non ramifiée de k, alors :

Proposition 1.1 ([12, section III]). — *Soit π_v une représentation irréductible continue (dans un espace vectoriel complexe) de $G(k_v)$. La dimension de l'espace des vecteurs fixes sous $G(\mathcal{O}_v)$ dans la représentation π_v est au plus 1. Et si cette dimension est 1, l'algèbre des fonctions sur $G(k_v)$ bi-invariantes par $G(\mathcal{O}_v)$ opère sur cet espace par un caractère et ce caractère détermine uniquement la représentation π_v.*

On appelle algèbre de Hecke sphérique l'algèbre des fonctions sur $G(k_v)$ bi-invariantes par $G(\mathcal{O}_v)$. Et c'est parce que cette algèbre est commutative (voir le théorème 1.3 ci-dessous pour une description plus précise) que la proposition ci-dessus est vraie. Une représentation irréductible de $G(k_v)$ ayant des vecteurs invariants sous $G(\mathcal{O}_v)$ est dite non ramifiée, étant entendu qu'il faut nécessairement que l'extension k' (quand elle a été introduite) de k soit elle-même non ramifiée.

1.3. Produit tensoriel restreint

Soit π une représentation irréductible et continue de $G(\mathbb{A})$; pour toute place v, on a défini la composante locale π_v de π. On a vu que pour presque tout v, la représentation π_v est non ramifiée. On définit alors le produit tensoriel restreint $\otimes'_v \pi_v$, en prenant dans le produit tensoriel ordinaire les vecteurs pour lesquels il existe un ensemble fini de places, S, contenant les places archimédiennes et les places où la caractéristique résiduelle de k_v est deux sous $G(\mathcal{O}^S)$.

PROPOSITION 1.2 ([14]). — *La représentation irréductible et continue π est isomorphe au produit tensoriel restreint de ses composantes locales π_v.*

1.4. Caractères de l'algèbre de Hecke sphérique

On rappelle que l'on a introduit le groupe G de façon concrète comme groupe d'automorphismes d'une forme bilinéaire sur l'espace vectoriel V ; à cette occasion on a introduit des coordonnées ; pour les groupes symplectiques on prend la forme symplectique standard $\langle (x_i; i \in [1,2n]), (y_j; j \in [1,2n]) \rangle = \sum_{i \in [1,n]} (x_i y_{2n-i+1} - x_{2n-i+1} y_i)$. Dans le cas où V n'est pas orthogonal et de dimension paire, les coordonnées sont les $x_i \in [1,2n]$ ($n = [\dim V/2]$) et éventuellement x_0 si $\dim V = 2n+1$. On note alors T le sous-groupe de G isomorphe à k^{*n} défini par

$$\forall t = (t_i; i \in [1,n]) \in k^{*n},\ \forall v = (x_i; i \in [1,2n], x_0);$$
$$t.v = (x_0, t_i x_i, t_i^{-1} x_{2n-i+1}; i \in [1,n]),$$

où x_0 n'intervient que si $\dim V = 2n+1$. Si V est un espace orthogonal de dimension paire, $2n$, on a introduit l'extension k' de k ; si $k' = k$, on peut changer la forme orthogonale en $\sum_{i \in [1,n]} x_i x_{2n-i+1}$ sans changer sa classe et la définition de T est la même que dans les cas précédents. Si k' est une extension de degré 2 de k, on vérifie aisément que les formules précédentes correctement adaptées montrent que G contient un sous-groupe isomorphe à $k^{*(n-1)} \times k'^*_1$ où k'^*_1 est le sous-groupe de k'^* formé des éléments de norme 1.

Dans tous les cas, on note T ce groupe ; c'est un sous-tore de G, maximalement déployé. À conjugaison près, ce tore est indépendant des coordonnées choisies.

Pour v une place de k, on note $T(k_v)$ les points de T à valeurs dans k_v et on note ${}^0T_v$ le compact maximal $T(\mathcal{O}_v)$ de $T(k_v)$.

THÉORÈME 1.3 (Isomorphisme de Satake [12, th. 4.1]). — *Soit v une place de k et on suppose que si k' est défini, l'extension k'_v de k_v est non ramifiée. On note aussi $W_v := \mathrm{Norm}_{G(k_v)} T(k_v)/T(k_v)$, c'est le groupe de Weyl de $G(k_v)$.*

L'algèbre de Hecke sphérique de $G(k_v)$ est naturellement isomorphe à l'algèbre des fonctions à support compact (c'est-à-dire fini) sur $T(k_v)/{}^0T_v$, invariantes sous W_v.