

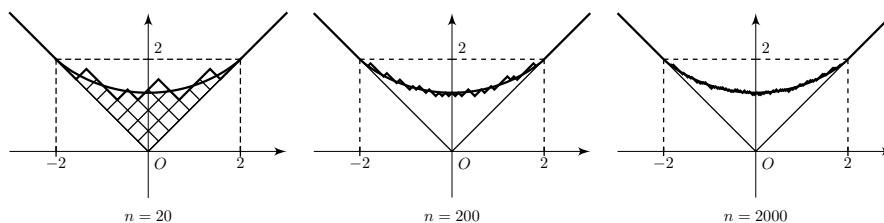
**NOUVEAUX DÉVELOPPEMENTS SUR LES VALEURS DES
CARACTÈRES DES GROUPES SYMÉTRIQUES;
MÉTHODES COMBINATOIRES**
[d'après Rouquier, Khovanov-Lauda, ...]

par Pierre CARTIER

INTRODUCTION

Il est difficile d'innover dans un sujet aussi vénérable que l'étude des caractères des groupes symétriques. L'ouverture a été faite dans l'article fondateur de Frobenius [A2] en 1900, suivi par Schur [A11] en 1901, et par Young [A13] en 1928. On dispose aujourd'hui d'un bon nombre d'excellents exposés d'ensemble [A5, A6, A8, A9, A10, A12].

Les travaux dont nous allons parler ont leur origine dans l'École de Saint-Petersbourg (autrefois Leningrad) : Kerov, Vershik, Olshanski, Ivanov, Okunkov... Leur motivation initiale était l'étude des *représentations factorielles du groupe symétrique* S_∞ , réunion de la suite des groupes symétriques $S_1 \subset S_2 \subset \dots \subset S_n \subset S_{n+1} \subset \dots$. Il s'agissait d'un exemple emblématique des méthodes d'algèbres d'opérateurs dans les espaces de Hilbert. En un sens convenable, il faut passer à la limite sur les diagrammes de Young de taille croissante. Il apparut vite que cela revenait à étudier la forme limite de diagrammes de Young aléatoires ; voici une illustration d'une simulation numérique sur des tableaux de taille 20, 200, puis 2000. La courbe limite se dessine très nettement.



Une autre source d'inspiration est venue des *probabilités non commutatives*. Le cadre est le suivant :

- un espace de Hilbert séparable \mathcal{H} ;
- une algèbre de von Neumann A d'opérateurs bornés dans \mathcal{H} (stable par l'adjonction $x \mapsto x^*$ et fermée pour la topologie faible de la dualité entre $\mathcal{L}(\mathcal{H})$ et l'espace $\mathcal{L}_1(\mathcal{H})$ des opérateurs à trace) ;
- un état \mathbb{E} sur A (forme linéaire faiblement continue, et positive $\mathbb{E}(x^*x) \geq 0$).

Lorsque l'algèbre A est *commutative*, on est ramené au cas probabiliste usuel : un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$, avec $A = L^\infty(\Omega, \mathbb{P})$ agissant par multiplication sur l'espace de Hilbert $\mathcal{H} = L^2(\Omega, \mathbb{P})$, et $\mathbb{E}[f] = \int_\Omega f d\mathbb{P}$ pour f dans A .

Vers 1970, Voiculescu a entrepris l'étude du cas fourni par l'algèbre de von Neumann engendrée par un *groupe libre* G agissant par la représentation régulière dans l'espace $\ell^2(G)$. Voiculescu a découvert que les générateurs du groupe libre satisfont à une propriété qui se réduit dans le cas des probabilités commutatives à l'indépendance stochastique. Ce nouveau domaine fut baptisé : « *probabilités libres* ». Les moments et les cumulants classiques des variables aléatoires se généralisent en « *cumulants libres* » qui font intervenir la combinatoire des « *partitions non-croisées* ». Le petit miracle est que ces partitions non-croisées correspondent aux factorisations minimales $\gamma_k = \tau\sigma$ d'une permutation circulaire γ_k dans le groupe symétrique S_k (cf. section 2.3.4). Ces factorisations minimales vont à leur tour se décrire au moyen des cartes biparties unicellulaires (cf. section 2.1.2). *Ces cartes seront le thème central des méthodes combinatoires décrites à la section 2.*

Si λ est une partition de n , et χ^λ le caractère de S_n correspondant à λ , on considère les valeurs normalisées des caractères

$$\text{Ch}_k(\lambda) := \frac{n!}{(n-k)!} \frac{\chi^\lambda(\gamma_k)}{\chi^\lambda(1)}$$

pour $n \geq k$. Utilisant les méthodes de probabilités libres, Biane [C1] a étudié le comportement asymptotique de $\text{Ch}_k(\lambda)$ quand n croît, et que le nombre de lignes et de colonnes de λ est d'ordre $O(\sqrt{n})$. La clé est fournie par les homothéties : identifiant λ à une région D_λ du plan \mathbb{R}^2 , l'homothétie de rapport t ($t \geq 1$ entier) transforme D_λ en $D_{h_t(\lambda)}$ pour une partition $h_t(\lambda)$ de nt^2 . Biane prouve que la limite

$$R_{k+1}(\lambda) = \lim_{t \rightarrow \infty} \text{Ch}_k(h_t \lambda) / t^{k+1}$$

existe, et il l'interprète en termes de cumulants libres. En particulier $R_2(\lambda)$ est la taille $|\lambda|$ de λ .

Il est remarquable que les quantités $\text{Ch}_k(\lambda)$ et $R_k(\lambda)$ sont *polynomiales* : introduisant les coordonnées multirectangulaires \mathbf{p}, \mathbf{q} (cf. section 1.1.5) de λ , on a des expressions polynomiales en \mathbf{p}, \mathbf{q} . De plus, il existe des formules universelles liant les Ch_k et les R_k : voici un échantillon

$$\begin{aligned}\text{Ch}_1 &= R_2 \\ \text{Ch}_2 &= R_3 \\ \text{Ch}_3 &= R_4 + R_2 \\ \text{Ch}_4 &= R_5 + 5 R_3 \\ \text{Ch}_5 &= R_6 + 15 R_4 + 5 R_2^2 + 8 R_2 \\ \text{Ch}_6 &= R_7 + 35 R_5 + 35 R_2 R_3 + 84 R_3.\end{aligned}$$

Dans [C1], p. 199, Biane⁽¹⁾ donne les valeurs de Ch_7 à Ch_{11} . Il y a une graduation naturelle par le degré total en les variables $p_1, p_2, \dots; q_1, q_2, \dots$. Alors R_k est homogène de degré k , et le terme de plus haut degré de Ch_k est R_{k+1} , de degré $k+1$ (cf. section 2.3.3). L'estimation asymptotique de Biane [C1], p. 127, résulte facilement des relations entre les R_k et les Ch_k .

D'une manière générale, Kerov écrit Ch_k sous la forme d'un polynôme (de Kerov)

$$K_k(R_2, R_3, \dots, R_{k+1}),$$

et la table ci-dessus suggère la *conjecture de Kerov* : les coefficients de K_k sont des entiers positifs. Cela a été prouvé récemment par V. Féray [B2] par utilisation de méthodes combinatoires de la théorie des graphes et des cartes. C'est ce que nous allons essayer d'expliquer en suivant ses exposés du cours Peccot 2013 au Collège de France.

1. LE GROUPE SYMÉTRIQUE

1.1. Notations et préliminaires

1.1.1. — Le groupe symétrique S_n est le groupe des permutations de l'ensemble $[n]$ des entiers $1, 2, \dots, n$. On fait la convention $[0] = \emptyset$, d'où $S_0 = (1)$. L'élément unité d'un groupe est toujours noté 1. Pour $1 \leq k \leq n$, on identifie S_k à un sous-groupe de S_n , en faisant correspondre à la permutation σ de $[k]$ la permutation de $[n]$ qui fixe tous les éléments de $[n] \setminus [k]$. On note γ_k le cycle $(12 \dots k)$, vu comme élément de S_k , donc aussi de S_n pour $n \geq k$.

1. Ce que nous notons Ch_k est désigné par Σ_k dans Biane, *loc. cit.*

1.1.2. — Une *composition* \mathbf{c} d'un entier $n \geq 1$ est une suite (c_1, \dots, c_k) d'entiers strictement positifs de somme $c_1 + \dots + c_k$ égale à n . Une *partition* λ de n est une composition à l'ordre près des éléments, et on peut toujours la normaliser de sorte que

$$\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_k > 0.$$

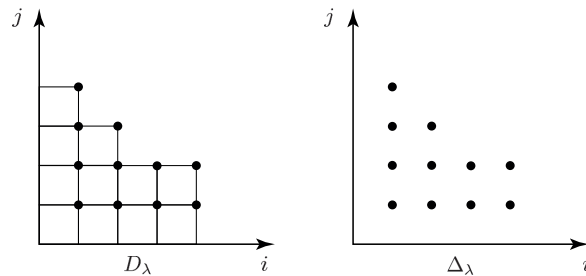
La *longueur* de λ , notée $\ell(\lambda)$, est k ; la *taille* de λ , notée $|\lambda|$, est la somme $\lambda_1 + \dots + \lambda_k$. La relation $|\lambda| = n$ s'écrit aussi souvent $\lambda \vdash n$. On est parfois amené à compléter une partition par une suite infinie de zéros. Une *composition* d'un ensemble X est une suite (C_1, \dots, C_k) de sous-ensembles non vides, deux à deux disjoints, de X , de réunion X . Une *partition* Π de X est un ensemble de parties non vides de X , deux à deux disjoints, de réunion X .

1.1.3. — Les partitions de n paramétrisent les classes de conjugaison des éléments π de S_n ; le *type cyclique* de π est la partition λ de n , soit $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_k)$, telle que π se compose de cycles de longueurs $\lambda_1, \dots, \lambda_k$. Les partitions paramétrisent aussi les représentations irréductibles de S_n (cf. section 1.2). Pour une partition λ de n , on note ρ^λ la représentation irréductible correspondante de S_n , χ^λ son *caractère*, et $\psi^\lambda := \chi^\lambda / \chi^\lambda(1)$ le *caractère normalisé*. Le *degré* $d_\lambda = \chi^\lambda(1)$ est la dimension de l'espace de la représentation ρ^λ .

1.1.4. — Décrivons les *diagrammes de Young*. Si $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_k)$ est une partition de n , on note Δ_λ l'ensemble des couples (i, j) d'entiers tels que

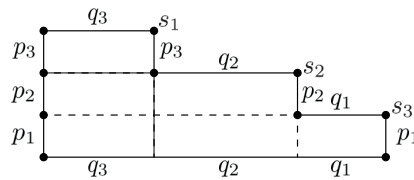
$$1 \leq j \leq k, \quad 1 \leq i \leq \lambda_j.$$

À tout couple (i, j) on associe le carré $D_{i,j} = [i-1, i] \times [j-1, j]$ de côté 1 dans \mathbb{R}^2 , dont le sommet nord-est est (i, j) ; on note aussi D_λ la réunion des carrés $D_{i,j}$ pour (i, j) dans Δ_λ (voir les figures dans le cas de la partition $\lambda = (4, 4, 2, 1)$ de taille 11).



Le cardinal $|\Delta_\lambda|$ de Δ_λ et l'aire $|D_\lambda|$ de D_λ sont égaux à $|\lambda|$. Sur le dessin de Δ_λ , les lignes et les colonnes sont évidentes. Les longueurs des lignes sont $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k$; celles des colonnes forment une partition $\tilde{\lambda} = (\tilde{\lambda}_1, \dots, \tilde{\lambda}_\ell)$ de n , dite *duale* de λ .

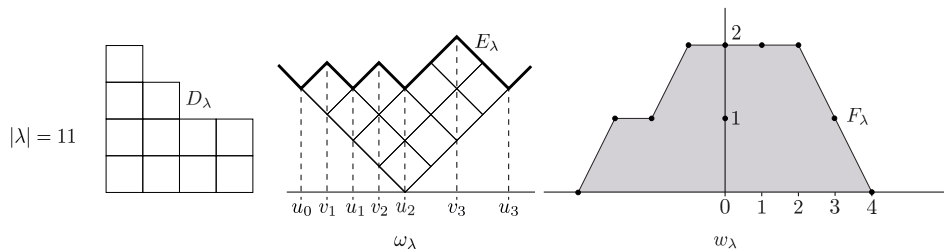
1.1.5. — Si p, q sont des entiers strictement positifs, on note $p \times q$ le diagramme rectangulaire formé de p lignes de longueur q , et de q colonnes de longueur p . Plus généralement, si \mathbf{p} et \mathbf{q} sont des compositions de même longueur $m \geq 1$, le diagramme $\mathbf{p} \times \mathbf{q}$ se compose de p_j lignes de longueur $q_j + q_{j+1} + \dots + q_m$ pour $1 \leq j \leq m$, et de q_j colonnes de longueur $p_1 + \dots + p_j$. Il y a en tout $p_1 + \dots + p_m$ lignes et $q_1 + \dots + q_m$ colonnes. Toute partition λ de n s'écrit de manière unique sous la forme $\mathbf{p} \times \mathbf{q}$; le diagramme Δ_λ est alors la réunion de rectangles $p_i \times q_j$ pour $1 \leq i \leq j \leq m$. La taille de la partition λ (ou du diagramme correspondant) est alors $|\lambda| = \sum_{i \leq j} p_i q_j$. Notre stratégie sera d'exprimer divers invariants associés à un tableau de Young comme polynômes en les *coordonnées multi-rectangulaires* \mathbf{p}, \mathbf{q} .



1.1.6. — Venons-en à la *notation russe*⁽²⁾. Le domaine polygonal E_λ est déduit de D_λ par la transformation linéaire $(x, y) \mapsto (x - y, x + y)$ dans \mathbb{R}^2 . Il existe une unique application continue ω_λ de \mathbb{R} dans \mathbb{R} qui a les propriétés suivantes :

- on a $\omega_\lambda(x) = |x|$ pour $|x|$ assez grand ;
- la fonction ω_λ est linéaire par morceaux, et sa pente est égale à $+1$ ou -1 ;
- le domaine E_λ est défini par les inégalités

$$|x| \leq y \leq \omega_\lambda(x).$$



2. Ce que nous venons de décrire est la notation « française ». La notation « anglo-saxonne » utilise le symétrique de D_λ par rapport à l'axe horizontal.