

NŒUDS, MOUVEMENTS DE REIDEMEISTER ET ALGORITHMES  
[d'après Lackenby]

par Arnaud de MESMAY

*O time, thou must untangle this, not I.  
It is too hard a knot for me t'untie.*

SHAKESPEARE, *La Nuit des rois*, acte 2, scène 2

INTRODUCTION

Comme Shakespeare ci-dessus, le lecteur s'est peut-être déjà retrouvé face à un nœud particulièrement retors qu'il a eu bien du mal à dénouer. L'objectif de cet exposé est de présenter un résultat de Lackenby [18] montrant qu'un nœud trivial n'est jamais *exponentiellement* ardu, c'est-à-dire qu'un nombre polynomial de mouvements suffit toujours à le démêler.

Formellement, nous nous intéressons dans cet exposé aux nœuds réguliers, c'est-à-dire aux plongements polygonaux de  $S^1$  dans  $\mathbb{R}^3$ . Deux nœuds sont dits équivalents s'il existe une *isotopie ambiante* (une déformation continue) de  $\mathbb{R}^3$  envoyant l'un sur l'autre, et un nœud est trivial s'il est isotope au plongement standard de  $S^1$ . Un problème central de la théorie des nœuds est le suivant :

PROBLÈME 1. — *Étant donné un nœud, comment déterminer si celui-ci est trivial ?*

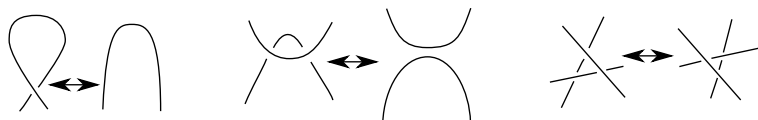


FIGURE 1. Les trois mouvements de Reidemeister.

Nous étudions ce problème dans le cadre combinatoire suivant. Une représentation courante d'un nœud est de projeter ce plongement sur un plan – de façon générique les points d'intersection ne seront pas plus que doubles. En précisant à chaque croisement quel brin passe au-dessus de l'autre, on obtient un *diagramme de nœud*. Génériquement, la projection d'une isotopie induit une isotopie, avec possiblement trois changements locaux autour des points doubles d'un diagramme de nœud, appelés *mouvements de Reidemeister*, voir la figure 1. Un *diagramme trivial* est un cercle plongé dans  $\mathbb{R}^2$ , et on obtient ainsi le théorème de Reidemeister, stipulant que partant d'un diagramme d'un nœud trivial, il existe une suite de mouvements de Reidemeister et d'isotopies planaires transformant celui-ci en un diagramme trivial.

Une approche naturelle pour s'attaquer au problème 1 est donc de trouver cette suite de mouvements de Reidemeister, ou de prouver qu'il n'y en a pas. Mais la question du nombre de mouvements suffisants pour simplifier le diagramme d'un nœud trivial est notoirement épineuse, comme le montre par exemple la discussion initiée par Gowers sur le forum MathOverflow [8]. Une des raisons est que la suite de mouvements de Reidemeister n'est pas nécessairement *monotone* : pour certains nœuds triviaux, il est nécessaire d'augmenter le nombre de croisements d'un diagramme avant de pouvoir le simplifier. Un exemple d'un tel nœud, dû à Goeritz, est illustré ci-contre, et des familles infinies de tels nœuds triviaux « difficiles » ont été construites par Kauffman et Lambropoulou [16]. Le théorème de Lackenby montre que malgré cette difficulté, on peut toujours dénouer un nœud trivial en utilisant un nombre de mouvements qui est polynomial en la complexité du diagramme initial. La meilleure borne connue précédemment, due à Hass et Lagarias, était exponentielle [10].



**THÉOREME 0.1 (Lackenby [18]).** — *Soit  $D$  le diagramme d'un nœud trivial avec  $c$  croisements. Il existe une suite d'au plus  $(236c)^{11}$  mouvements de Reidemeister qui transforment  $D$  en le diagramme trivial.*

Hass et Nowik [12] montrent que certains nœuds nécessitent  $c^2/25$  mouvements de Reidemeister pour être simplifiés.

Un *entrelacs* est un plongement polygonal de deux<sup>(1)</sup> copies disjointes de  $\mathbb{S}^1$  dans  $\mathbb{R}^3$ , et un problème connexe est de déterminer si un entrelacs donné est *séparé*, c'est-à-dire s'il existe une sphère séparant les deux nœuds. Dans le même cadre combinatoire, un diagramme d'entrelacs *déconnecté* est un diagramme où les deux brins à chaque point double appartiennent entièrement à un nœud ou à l'autre : intuitivement les deux nœuds ont été séparés l'un de l'autre. Par des mouvements

<sup>(1)</sup> La définition habituelle d'un entrelacs autorise un nombre arbitraire de composantes connexes, mais dans cet exposé il n'y en aura toujours que deux.

de Reidemeister, on peut transformer tout diagramme d'un entrelacs séparé en un diagramme déconnecté, et là encore, Lackenby montre qu'un nombre polynomial de mouvements suffit.

**THÉORÈME 0.2** (Lackenby [18]). — *Soit  $D$  le diagramme d'un entrelacs séparé avec  $c$  croisements. Alors il existe une suite d'au plus  $(49c)^{11}$  mouvements de Reidemeister qui le transforment en un diagramme déconnecté.*

*Implications algorithmiques.* — Ces bornes polynomiales fournissent un algorithme très simple pour détecter si un nœud est trivial, ou si un entrelacs est séparé : il suffit d'essayer toutes les combinaisons de  $O(c^{11})$  de mouvements de Reidemeister possibles (avec la constante correspondant au problème), et de conclure positivement si et seulement si l'un des diagrammes obtenus est trivial/déconnecté. Le nombre d'opérations est exponentiel, ce n'est donc pas un algorithme bien efficace, mais notons qu'aucun algorithme polynomial n'est connu pour ces problèmes (même si en pratique, les meilleurs algorithmes connus ont des bonnes performances, voir Burton et Ozlen [4]). Du point de vue de la théorie de la complexité, cela montre également que ces problèmes sont dans la classe **NP**, c'est-à-dire que si le nœud est trivial (ou l'entrelacs séparé), il existe un certificat de taille polynomiale qui permet de le vérifier en temps polynomial. Ici, le certificat est simplement la suite de mouvements de Reidemeister à effectuer. Ce résultat avait déjà été établi par Hass, Lagarias et Pippenger [11], mais leur certificat était bien moins naturel, en tout cas pour quelqu'un de non familier avec les surfaces normales.

Une avancée très récente, également due à Lackenby [21], est que le problème de déterminer si un nœud est trivial est également dans **co-NP**, c'est-à-dire que si un nœud n'est *pas* trivial, il existe également un certificat polynomial permettant de le vérifier. Ce certificat est beaucoup moins évident : on ne peut pas utiliser les mouvements de Reidemeister pour certifier ce sens inverse, et Lackenby utilise la théorie des *feuilletages tendus*, étudiés par Gabai [7] et Thurston [24].

Une généralisation directe du Problème 1 est de chercher un algorithme qui permette de reconnaître un nœud fixé, par exemple un nœud de trèfle droit. Dans un travail annoncé [19] mais à ma connaissance pas encore publié, Lackenby étend le théorème 0.1 à ce cadre pour montrer que deux diagrammes d'un même nœud donné  $L$  diffèrent d'un nombre polynomial de mouvements de Reidemeister (où le polynôme dépend du nœud  $L$ ). Cela fournit donc un algorithme exponentiel pour ce problème, et montre qu'il est également dans **NP**.

Une autre généralisation, bien plus forte, du Problème 1 est, au lieu de reconnaître juste un nœud donné, de chercher un algorithme décidant si deux nœuds sont équivalents. Les connaissances actuelles sur cette question sont beaucoup plus réduites :

depuis les travaux de Haken, on connaît un algorithme pour résoudre ce problème<sup>(2)</sup> mais sa complexité est gigantesque, et nous renvoyons le lecteur au livre de Matveev [22] pour plus de détails.

Pour conclure cette introduction, mentionnons que les problèmes difficiles, voire indécidables, sont monnaie courante en algorithmique, mais une des spécificités des problèmes venus de la théorie des nœuds (ou plus largement de la topologie en basse dimension) est qu'on ne sait souvent pas *prouver* qu'ils sont difficiles. Malgré des progrès récents sur quelques questions (notamment, encore une fois, par Lackenby [20]), on ne sait par exemple pas si le problème d'équivalence des nœuds est **NP**-difficile (ce qui serait un très fort indice qu'il n'admet pas d'algorithme polynomial).

Pour une discussion plus en détail de ces questions algorithmiques (entre autres) de théorie des nœuds, nous renvoyons à l'excellent article de survol de Lackenby [19].

*Organisation de cet exposé.* — La preuve des théorèmes 0.1 et 0.2 repose sur deux théories d'apparence assez distinctes, d'une part la théorie des *surfaces normales*, d'autre part celle des *présentations par arcs*. Comme chacune de ces approches fournit indépendamment une borne exponentielle sur le nombre de mouvements de Reidemeister, c'est également une bonne raison pour commencer par les exposer, ce qui est fait en sections 1, 2 et 3. Nous expliquons ensuite la contribution de Lackenby en combinant ces deux approches dans la section 4.

La borne polynomiale est obtenue suivant des idées identiques pour le problème de l'entrelacs séparé et du nœud trivial, mais dans le deuxième cas, d'importantes techniques apparaissent. Pour faciliter la présentation des idées principales, nous nous concentrons donc à partir de la section 3 sur le problème de l'entrelacs séparé, pour lequel nous pouvons expliquer presque toutes les étapes de la solution. Dans la section 5, nous discutons des différences à apporter pour traiter le cas du nœud trivial.

Enfin, pour améliorer la lisibilité, nous restons vagues sur les constantes et les polynômes apparaissant dans les preuves, utilisant la notation  $\text{poly}(c)$  pour désigner un certain polynôme en  $c$ , dont le degré augmentera au fur et à mesure des arguments.

*Remerciements.* — Je suis reconnaissant à Éric Colin de Verdière, Pierre Dehornoy, Francis Lazarus, Christine Lescop, Corentin Lunel et Jean-Baptiste Meilhan pour leurs nombreux commentaires sur une version préliminaire de cet exposé.

## 1. SURFACES NORMALES ET UNE PREMIÈRE BORNE EXPONENTIELLE

Les surfaces normales sont la pierre angulaire de tout un pan de la théorie algorithmique des nœuds, entrelacs, et plus généralement des 3-variétés. Un très grand

---

<sup>(2)</sup> Plus généralement, il permet de tester l'homéomorphisme des variétés de Haken.

nombre de problèmes algorithmiques reviennent à trouver une certaine surface dans une 3-variété triangulée, et une observation fondamentale dont l'idée remonte à Kneser [17] est que dans de nombreux cas, l'on peut supposer que cette surface n'est pas trop compliquée, c'est-à-dire qu'elle n'intersecte une triangulation donnée qu'en des morceaux élémentaires assez simples.

### 1.1. Triangulations

Pour décrire la théorie des surfaces normales, il est nécessaire de trianguler l'espace tridimensionnel que l'on considère, et pour des problèmes sur un nœud ou entrelacs  $L$ , cet espace est le complémentaire  $\mathbb{S}^3 \setminus N(L)$ , où  $N(L)$  désigne un voisinage régulier de  $L$ . Dans cet exposé, une triangulation d'une 3-variété (potentiellement à bord)  $M$  est un complexe simplicial pur de dimension 3 homéomorphe à  $M$ , tel que chaque point est localement homéomorphe à  $\mathbb{R}^3$  ou à un demi-espace<sup>(3)</sup>. Si  $L$  est un nœud, l'espace  $N(L)$  est un tore plein, et la classe d'homologie sur  $\partial M = \partial N(L)$  qui borde un disque dans  $N(L)$  est appelée *méridienne*. Une classe d'homologie ayant intersection algébrique 1 avec la méridienne et non liée avec  $L$  est appelée *longitude*.

LEMME 1.1. — *Un nœud  $L$  est trivial si et seulement si il existe un disque plongé dans  $\mathbb{S}^3 \setminus N(L)$  dont le bord est une longitude.*

*Démonstration.* — S'il existe un tel disque, on peut l'utiliser pour obtenir une isotopie de  $L$  vers le nœud trivial. Réciproquement, un diagramme trivial fournit un disque ayant pour bord une longitude, et cette propriété est maintenue durant l'isotopie.  $\square$

Pour un nœud  $L$  décrit par une succession de  $n$  segments dans  $\mathbb{R}^3$ , ou bien pour un diagramme à  $c$  croisements, une triangulation de  $\mathbb{S}^3 \setminus N(L)$  peut être obtenue avec un nombre polynomial (en  $n$  ou en  $c$ ) de tétraèdres, par exemple en commençant avec  $L$  dans le 1-squelette d'une triangulation de  $\mathbb{S}^3$ , puis en itérant deux subdivisions barycentriques pour creuser et exclure un voisinage tubulaire de  $L$ . Nous ne nous attardons pas pour l'instant sur cette construction (voir par exemple Hass, Lagarias et Pippenger [11, Lemme 7.2] pour plus de détails) parce qu'une autre, plus adaptée à notre objectif final, sera décrite en section 4.

---

<sup>(3)</sup> La théorie algorithmique des 3-variétés utilise généralement des triangulations plus souples, autorisant par exemple des tétraèdres à être recollés sur eux-mêmes, mais ce ne sera pas nécessaire ici.